DTU

DTU Bibliotek

Denne fil er downloadet fra

Danmarks Tekniske Kulturarv

www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på *www.tekniskkulturarv.dk/about*

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

L. F. Johanssen.

Fluiders Bevægelse.

INDUSTRI-
FORENINGEN.

~~75~~

532

532

[illegible]
[illegible]

14—41

ELEMENTERNE AF EN NY THEORI

FOR

FLUIDERS BEVÆGELSE

AF

L. F. JOHANSSEN
KAND. FILOS.

Kristiania 1897.
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG
LARS SWANSTRØM

INDUSTRI-
FORENINGEN.

J. Steenbergs bogtrykkeri, Horten. 1897.

Den nuværende lære om fluiders bevægelse lider af mange og store mangler. Den er i virkeligheden helt igjennem feilagtig, og feilene viser sig lige fra grundvolden af. Af de to fundamentale theoremer for bevægelseslæren — nemlig d'Alemberts princip og satsen om tilvexten af levende kraft — er d'Alemberts princip uanvendeligt til bestemmelse af fluidernes bevægelse, og ikke blot af den grund, at de opstillede differentialligninger ikke kan integreres. Principet kan ikke benyttes ved fluiderne. Det andet fundamentale theorem for bevægelseslæren — satsen om tilvexten af levende kraft — er ufuldstændigt og misvisende. Ved levende kraft forstaar man det arbeide, som medgaar til meddelelse af den givne hastighedsforøgelse. Og dette antager man uden videre er ligt det arbeide, fluidet kan udføre paa grund af den erholdte hastighedsforøgelse. Man skjelner ikke mellem accelerationsarbeidet og arbeidsevnen, men antager disse for identiske. Dette er aldeles urigtigt. Jeg udvikler en ny sats, hvorefter arbeidsevnen særskilt kan bestemmes.

Ved læren om det specifike tryk under bevægelsen begaar ligeledes den nuværende lære feil af grundlæggende betydning; og ligesaa ved theorien for stød og reaktion. Til bestemmelse af kontraktionskoefficienten ved udløb af munding i tynd væg har man ingen theori; jeg udvikler en saadan og opstiller formler, hvorefter kontraktionskoefficienten theoretisk kan bestemmes. Ved læren om trykhøidetabet ved tversnitsforandringer kommer man nu til det umulige resultat, at der i en forsnevring kan fremkomme en hastighed, som er større end den, der bestemmes af den givne trykhøide ved mundingen. Jeg udvikler en ny formel for trykhøidetabet ved pludselige tværsnitsforandringer og opstiller ligeledes en formel for trykhøidetabet ved ikke pludselige tværsnitsforandringer, hvor der efter den gjældende lære intet trykhøidetab skal fremkomme. Ved den nuværende theori for kontraktionskoefficienten ved cylindriske ansatsrør fremkommer paa det kontraherede sted en hastighed, som er større end den, der bestemmes af trykhøiden ved mundingen. Jeg udvikler en ny theori, hvorefter hastigheden paa det kontraherede sted ikke er større end den, der bestemmes af den givne trykhøide, men lig denne, og opstiller en ny formel til bestemmelse af kontraktionskoefficienten.

Ved den nuværende lære om luftformige legemers bevægelse forekommer endnu en fundamental feil. Man anvender den tilstandsligning, der gjælder for permanente gasarter under ligevægten, ogsaa under bevægelsen, Jeg opstiller en ny tilstandsligning, der gjælder for permanente gasarter under bevægelsen, og hvoraf tilstandsligningen under ligevegten udledes som et specielt tilfælde. Paa grund af den nye tilstandsligning blir ogsaa formlerne for tætheden, trykket, hastigheden, udløbsmængden og temperaturen af den udstrømmende gas forskjellig fra de nuværende. Den nuværende udløbsformel, der er opstillet af de Saint Venant og Wantzel, gir vistnok resultater, der stemmer godt med iagttagelserne. Men for at naa rimelige resultater har man maattet opstille en hypothese, som er aldeles forkastelig. Man antager nemlig, at trykket i mundingen ikke synker under den værdi, der gir maximum af udløbsmængde Ved permanente gaser skal efter denne hypothese trykket i mundingen ikke blive mindre end halvparten af det indre tryk. Naar nemlig det ydre tryk er blevet lig halvparten af det indre, har udløbsmængden naaet sin største værdi og holder sig efter iagttagelserne konstant paa denne, naar det ydre tryk synker. Efter den opstillede hypothese vil ikke blot udløbsmængden blive konstant fra det øieblik, det ydre tryk er synket ned til halvparten af det indre. Da nemlig tætheden af den udstrømmende gas efter den nu gjældende theori bestemmes af trykket i mundingen, vil ogsaa hastigheden og den levende kraft blive konstante. Men dette resultat maa gjøre hypothesen forkastelig. Det kan ikke antages, at alle disse forskjellige overtryk, alle disse forskjellige kræfter, virkende i samme tid paa samme masse, nemlig den konstante udløbsmængde, skal meddele denne masse den samme hastighed. Om man saaledes har et indre tryk af 20 athm., saa blir udløbsmængden den samme, enten det ydre tryk er 10 athm., eller 1 athm., eller 0 athm., medens overtrykket blir henholdsvis 10 athm., 19 athm. og 20 athm. Det kan ikke antages, at et tryk af 20 athm. meddeler den samme masse den samme hastighed, som et tryk af 10 athm. meddeler, naar ikke tiden, hvori de to tryk virker paa massen er forskjellig. De Saint Venant og Wantzels formel kan heller ikke forliges med den mekaniske varmetheori. Den meddelte levende kraft skal efter de Saint Venant og Wantzels formel være en virkning af expansionsarbeidet af selve den gas, som strømmer ud, uden varmetilførsel udenfra. Men iagttagelserne viser, at ogsaa temperaturen af gasen i beholderen synker betydelig under udstrømningen. En anden udløbsformel antager ogsaa den meddelte levende kraft for en virkning af selve gasens expansion, men antager, at gasen tilføres saamegen varme under expansionen, at temperaturen blir uforandret. For at denne formel skal give rimelige resultater maa man opstille en lignende forkastelig hypothese som ved de Saint Venant og Wantzels formel. Desuden er forudsætningen om temperaturens uforanderlighed under expansionen urigtig, idet temperaturen synker under udstrømningen. Den af mig opstillede udløbsformel gir umiddelbart uden hypothese resultater, der stemmer godt med iagttagelserne, hvad udløbsmængden angaar; den gir i den henseende saa gode resultater, som man kan vente af en theoretisk formel, hvor ikke hensyn er taget til friktionen. Udløbsmængden viser paa det nærmeste en konstant værdi, naar det ydre tryk fra at være lig halvparten af det indre synker ned til 0. Derimod voxer hastigheden stadig med det stigende overtryk og ligesaa den levende kraft. Desuden maa efter den betragtningsmaade, der danner grundvolden ved udledningen af formlen, saavel gasen i beholderen, som den gas, der strømmer ud, afgive varme ved udløbet. Den meddelte levende kraft betragtes nemlig som en virkning baade af arbeidet af gasens tryk i beholderen og af expansionsarbeidet af gasen under udstrømningen.

Jeg har dvælet saa længe ved den opstillede udløbsformel for permanente gaser, fordi den afgir en prøve paa rigtigheden af mine nye hydrauliske theorier. Den kan alene udledes ved hjælp af disse. Naar den nu viser afgjørende fortrin fremfor de nuværende udløbsformler, kunde det ogsaa være rimeligt at slutte, at mine hydrauliske theorier er de gamle overlegne.

At erholde rigtigere hydrauliske theorier er ikke blot af interesse i videnskabelig henseende. Det er ogsaa af største betydning i praktisk henseende, idet konstruktionen af de hydrauliske apparater kan afhænge af theorien.

Grundprinciperne for bevægelseslæren.

Theoremet om tilvexten af levende kraft udtaler, at ved bevægelsen af et system af punkter, forbundne paa en hvilkensomhelst maade, er tilvexten af levende kraft lig summen af de givne kræfters arbeide. Tilvexten af levende kraft eller det arbeide, som medgaar til hastighedens forøgelse (accelerationsarbeidet), antages at være lig tilvexten i arbeidsevne, altsaa lig det arbeide, som systemet paa grund af den erholdte hastighedsforøgelse kan udføre, inden denne atter er berøvet systemet. Denne antagelse er i mange tilfælde urigtig, og satsen er derfor ufuldstændig og misvisende.

Har man et system af materielle punkter, som er i ligevægt under paavirkning af kræfter, saa vil der være ligevægt mellem de givne kræfter og forbindelseskræfterne. Da forbindelseskræfterne altid er parvis ligestore og modsatte og følgelig holder hverandre i ligevægt, vil ogsaa de paa punkterne virkende givne kræfter holde hverandre i ligevægt. Har de givne kræfter en bestemt størrelse, saa maa ogsaa forbindelseskræfterne have en bestemt størrelse. Faar de givne kræfter en anden værdi, medens systemet fremdeles er i ligevægt, saa maa ogsaa forbindelseskræfterne antage en anden værdi. Og omvendt vil der til en bestemt værdi af forbindelseskræfterne svare en bestemt værdi af de givne kræfter, naar systemet er i ligevægt. Er de paa punkterne virkende kræfter under ligevægten P_1, P_2 . . ., P_n, og man tilføier kræfterne p_1, p_2 . . . p_n, vil i almindelighed ligevægten ophøre og punkterne erholde en vis forøgelse af sin hastighed. Hvis nu forbindelseskræfterne under hastighedsforøgelsen antager andre værdier end under ligevægten, saa vil ogsaa de paa punkterne virkende kræfter, som holdes i ligevægt af forbindelseskræfterne, faa andre værdier og forandres til (P_1, x_1), (P_2, x_2) . . . (P_n, x_n), hvor x er en kraft, hvis størrelse varierer under hastighedsforøgelsen. Da nu de givne kræfter under hastighedsforgelsen er (P_1, p_1), (P_2, p_2) . . . (P_n, p_n), og kræfterne (P_1, x_1), (P_2, x_2) . . . (P_n, x_n)) er i ligevægt under hastighedsforøgelsen, saa bliver følgelig de til forøgelse af hastigheden virksomme kræfter $(p_1, -x_1)$, $(p_2, -x_2) \ldots (p_n, -x_n)$. Og tilvexten af levende kraft blir lig summen af disse kræfters arbeide. Da nu kræfterne (P_1, x_1), $(P_2, x_2) \ldots (P_n, x_n)$) holder hverandre i ligevægt, saa vil ogsaa tilvexten af levende kraft være lig summen af de givne kræfters arbeide. Derimod vil tilvexten i arbeidsevne ikke være lig arbeidet af kræfterne $(p_1, -x_1)$, $(p_2, -x_2) \ldots (p_n, -x_n)$; tilvexten i arbeidsevne vil bestemmes af de tilføiede kræfter $p_1, p_2 \ldots p_n$ og af den forandring, som de paa punkterne virkende givne kræfter $P_1, P_2 \ldots P_n$ lider, naar den meddelte hastighedsforøgelse atter er berøvet systemet. Hvis $P_1, P_2 \ldots P_n$ er uforandrede, naar systemet er tilbageført til den oprindelige hastighed, saa vil tilvexten i arbeidsevne være lig arbeidet af de tilføiede kræfter $p_1, p_2 \ldots p_n$. Dette vil være tilfældet ved faste legemer og væsker. Ved disse vil kræfterne (P) være uforandrede, naar bortsees fra det uendelig tynde overfladeskikt, hvor det ydre tryk virker. Den tilvext i arbeidsevne, som bevirkes ved forandringen af kræfterne (P) i det uendelig tynde overfladeskikt, er selv uendelig liden. Ved faste legemer og væsker kan man derfor antage, at naar systemet atter antager den oprindelige hastighedstilstand, saa vil de kræfter (P_1, x_1), $(P_2, x_2) \ldots (P_n, x_n)$), som under accelerationen holdes i ligevægt af forbindelseskræfterne, forandres til $P_1, P_2 \ldots P_n$. Er værdierne af $x_1, x_2 \ldots x_n$, naar kræfterne $p_1, p_2 \ldots p_n$ ophører at virke, $a_1, a_2 \ldots a_n$, saa vil følgelig kræfterne (P_1, a_1), $(P_2, a_2) \ldots (P_n, a_n)$) holdes i ligevægt af forbindelserne. Tilføies nu kræfterne $-p_1, -p_2 \ldots -p_n$, saa vil disse meddele en hastighed i modsat retning af den, som kræfterne $p_1, p_2 \ldots p_n$ meddelte. De givne kræfter blir da: $(P_1, a_1, -p_1)$, $(P_2, a_2, -p_2) \ldots (P_n, a_n, -p_n)$). Af disse kræfter er $a_1, a_2 \ldots a_n$ variable og kan sættes lig $a_1 - x_1$, $a_2 - x_2 \ldots a_n - x_n$, hvor x varierer fra 0 til a_1, x_n fra 0 til a_n. De kræfter, som holdes i ligevægt af forbindelserne, blir $(P_1, (a_1 - x_1))$, $(P_2, (a_2 - x_2)) \ldots$ $(P_n, (a_n - x_n))$, og de virksomme kræfter blir $(-p_1, +x_1)$, $(-p_2, +x_2) \ldots (-p_n, +x_n)$, der meddeler de samme accelerationer, som de virksomme kræfter, der fremkalder bevægelsen, og bringer denne til ophør i samme tid, hvori disse fremkaldte den.

Theoremet om tilvexten af levende kraft er saaledes ufuldstændigt og vildledende. Man faar istedet derfor ved faste legemer og væsker de to følgende satser:

1) Ved bevægelsen af et system af punkter, forbundne paa en hvilkensomhelst maade, er tilvexten i levende kraft lig de givne kræfters arbeide.
2) *Ved bevægelsen af et system af punkter, forbundne paa en hvilkensomhelst maade, er tilvexten i arbeidsevne lig summen af de kræfters arbeide, ved hvis tilføielse bevægelsen fremkaldes.*

Man ser af det foran udviklede, at naar $x = 0$, altsaa naar de kræfter, som er i ligevægt, og følgelig ogsaa forbindelseskræfterne er uforandrede under hastighedsmeddelelsen, saa er de givne kræfters arbeide lig de kræfters arbeide, ved hvis tilføielse bevægelsen fremkaldes. Man kan da for fuldstændigheds skyld ogsaa opstille en tredie sats, der er en følge af de to foregaaende:

3) Tilvexten i arbeidsevne og tilvexten i levende kraft er lige store, naar de paa systemets punkter virkende givne kræfter, som er i ligevægt, ikke forandres under bevægelsen.

Ved beviset for satsen om tilvexten i arbeidsevne er der forudsat, at de kræfter $P_1, P_2 \ldots P_n$, som under den oprindelige ligevægtstilstand virker paa punkterne, er uforandret af samme værdi, naar punkterne efter den fremkaldte bevægelses ophør atter antager en ny ligevægtstilstand. Dette kan antages at være tilfældet ved væsker, hvor tætheden og følgelig ogsaa tyngdekraftens virkning er tilnærmelsesvis uafhængig af det ydre tryk og varmen. Ved væsker vil derfor ved en hvilkensomhelst ligevægtstilstand, ved ethvert ydre tryk kræfterne $P_1, P_2 \ldots P_n$ være uforandrede. Ved gasarter derimod, hvor tætheden er afhængig af det ydre tryk, vil kræfterne $P_1, P_2 \ldots P_n$, naar bevægelsen ophører, og punkterne atter er kommet i ligevægt under et andet tryk end det oprindelige, antage andre værdier end under den oprindelige ligevægtstilstand. Da det ydre tryk under den nye ligevægtstilstand er mindre end under den oprindelige, vil ogsaa kræfterne $P_1, P_2 \ldots P_n$ paa grund af tilstandsligningen for gaser under ligevægt antage mindre værdier $P_1 - Z_2$, $P_2 - Z_2$, ... $P_n - Z_n$. Tilvexten i arbeidsevnen vil derfor i dette tilfælde være en virkning foruden af de tilføiede kræfter $p_1, p_2 \ldots p_n$ ogsaa af kræfterne $Z_1, Z_2 \ldots Z_n$.

De paa systemets punkter virkende givne kræfter (P) er, naar bortsees fra overfladetrykkene, ved fluiderne tyngdekraften og varmen. Man kan sætte $P = g \rho d V$, hvor g er tyngdens acceleration og d V volumelementet. Dersom der nu under hastighedsforøgelsen indtræder en forandring af størrelsen af de kræfter (P), som holdes i ligevægt, maa dette ske ved, at enten g eller ρ eller begge forandres. Ved væsker, hvor ρ er konstant, maa forandringen af (P) frembringes ved, at tyngdens acceleration g undergaar en forandring. Dersom nu de accelerende kræfter er større end de tilføiede kræfter (p), maa kræfterne (P), som holdes i ligevægt, under hastighedsforøgelsen formindskes, og følgelig ogsaa tyngdens acceleration g antage en mindre værdi under hastighedsforøgelsen end under ligevægten. Væskens vægt vil saaledes under hastighedsforøgelsen vise sig formindsket. Er tyngdens acceleration g forandret til g', maa, naar ikke hastigheden forandres, ogsaa volumelementet d V, hvorpaa en af de tilføiede kræfter (p) virker, forandres fra d V til $\frac{g}{g'}$ d V. Volumet af den udstrømmende væske vil følgelig ogsaa forøges i forholdet g: g'. Kaldes det i ét sekund udstrømmende volum, naar accelerationen g er uforandret under hastighedsforøgelsen, V, saa blir det udstrømmende volum, naar accelerationen forandres fra g til g', $\frac{g}{g'}$ V. Vægten af den udstrømmende væske blir derimod i begge tilfælde den samme, nemlig g ρ V i første tilfælde og g' $\left(\frac{g}{g'} \rho \, V\right)$ i andet tilfælde. Hvis nu i andet tilfælde accelerationen g', efter at hastighedsforøgelsen er ophørt og bevægelsen er blevet konstant, atter antager værdien g i ligevægtstilstanden, saa vil vægten af den i andet tilfælde udstrømmende væskemængde forøges fra g ρ V til g. $\frac{g}{g'}$ ρ V. Den hastighedsforøgelse, som vægten g ϱ V erholdt, hvilken vi betegne med v, forandres da til w, saaledes at $\varrho \, V \, v^2 = \frac{g}{g'} \varrho \, V \, w^2$; hvoraf:

$$w = v \sqrt{\frac{g}{g'}}$$

Som senere vises, formindskes tyngdens acceleration ved frit udløb baade gjennem munding i tynd væg og — i endnu høiere grad — gjennem ansatsrør. Accelerationen g vil kunne formindskes til det halve ved fuldt udløb gjennem afrundede mundstykker. Denne vægtformindskelse af den gjennem mundstykket strømmende væske vil kunne exprimentelt paavises.

Ved gasarters udløb vil foruden g ogsaa ϱ forandres. Paa grund af forandringen af ϱ vil ogsaa udløbshastigheden forøges ved siden af den forandring af udløbsmægden, som bevirkes ved forandringen af g.

Ved hastighedsmeddelelse til faste legemer, hvor kræfterne (P) er uforandrede ikke blot, naar legemet er tilbageført til den oprindelige hastighedstilstand, men ogsaa under selve hastighedsforøgelsen, gjælder sats (3), hvorefter tilvexten i arbeidsevne er lig tilvexten i levende kraft.

Ved hastighedsmeddelelse til flydende legemer vil, naar hastighedsmeddelelsen foregaar ved udløb af et reservoir, i praksis altid kræfterne (P) under hastighedsforøgelsen undergaa en forandring, som ikke kan sættes ud af betragtning. Ved disse maa derfor tilvexten i arbeidsevne beregnes efter sats (2).

Ved hastighedsmeddelelse til luftformige legemer vil kræfterne (P) ikke blot undergaa forandring under selve hastighedsforøgelsen, men ogsaa i den ny ligevægtstilstand antage andre værdier end i den oprindelige. Tilvexten i arbeidsevne kan derfor ved luftformige legemer ikke beregnes efter sats (2). Ved behandlingen af gasers bevægelse vises, hvorledes arbeidsevnen i dette tilfælde bestemmes.

Det andet grundtheorem for bevægelseslæren, *d'Alemberts princip*, er kun i et specielt tilfælde brugeligt for sit øiemed.

Det udtaler, at ved bevægelsen af et system af punkter de givne kræfter og de totale kræfter, naar de tages i modsat retning af bevægelsen, holder hverandre i ligevægt. Den totale kraft i et punkt er den kraft, der vilde fremkalde punktets bevægelse, hvis punktet var ganske frit. Den totale kraft er saaledes lig punktets masse, multipliceret med accelerationen. Af d'Alemberts princip kan kun udledes ligninger, som udtrykker, at der er ligevægt, eller at hastigheden er konstant. Størrelsen og retningen af den totale kraft i et punkt kan derimod ikke udledes af dette princip. Det indeholder kun, at de totale kræfters resultant er den samme som de givne kræfters. Men af størrelsen og retningen af en saadan resultant kan ingen slutning drages angaaende størrelsen og retningen af hver enkelt komponent. En kraft kan paa uendelig mange maader opløses i et givet antal komponenter. Der er derfor uendelig mange maader, hvorpaa de givne kræfter kan holdes i ligevægt af de totale kræfter, tagne i modsat retning af bevægelsen. Bevægelsen af et system af punkter kan saaledes aldrig bestemmes af d'Alemberts princip alene. Problemet kan kun løses ved hjælp af dette princip i forbindelse med den givne lov for forbindelserne mellem punkterne. Hvis man af denne kan uddrage bestemte love for den relative bevægelse af punkterne, saaledes som naar punkterne er uforanderlig forbundne, vil problemet være løseligt. Kan derimod punkternes relative bevægelse til hverandre foregaa paa uendelig mange maader, saaledes som ved fluiderne, saa vil man ikke ved hjælp af ligevægtsligningerne kunne udlede bevægelseslovene.

Væskers bevægelse i lukkede kanaler under konstant tryk*).

Almindelige differentialligninger for fluiders bevægelse kan ikke opstilles. De, man nu har, er feilagtige. Den ene af dem er den saakaldte kontinuitetsligning. Denne udledes af en egenskab, som vilkaarlig tillægges elementets masse. Man antager denne for konstant under bevægelsen. Deraf udleder man en ligning, som udtrykker dette. Denne ligning gjælder kun under den forudsætning, at massen er konstant. Men nu er størrelsen af elementets masse fuldkommen vilkaarlig, kun med den begrænsning,

*) Hypothesen om den lineære bevægelse, der i mange tilfælde ikke kan forliges med de virkelig stedfindende forhold, benyttes ikke.

at den maa være uendelig liden. Kræfternes accelerationer paavirkes nemlig ikke af en forandring af massen, idet kræfterne er proportionale med massen. Man kan derfor lade elementets masse være konstant, eller man kan lade den variere efter en vilkaarlig valgt lov. Kontinuitetsligningen udtrykker saaledes, at en vilkaarlig forudsætning er en nødvendig lov. Den udtrykker, at massen *maa* være konstant, hvilket er feilagtigt. I det hele er det jo en absurditet af massen alene at ville udlede egenskaber ved elementets hastighed.

Istedetfor den kontinuitetsligning, som udtrykker, at massen af et element er konstant under bevægelsen, benyttes i almindelighed en anden kontinuitetsligning, som ogsaa jeg anvender ved bestemmelsen af bevægelsen. Denne udtrykker, at der i samme tid strømmer den samme masse af fluidet gjennem alle tversnit. Denne kontinuitetsligning antager man kun i formel henseende er forskjellig fra den, som opstilles blandt differentialligningerne for bevægelsen. Man mener i almindelighed, at der ingen realitetsforskjel er mellem de to kontinuitetsligninger. Denne mening er ganske feilagtig. Den almindelig anvendte kontinuitetsligning er en ganske anden en den, som opstilles blandt differentialligningerne. Den almindelig anvendte kontinuitetsligning er en nødvendig følge af den egenskab ved bevægelsen, at der er kontinuitet, og udtrykker kun, at denne egenskab er tilstede, medens den kontinuitetsligning, som opstilles blandt differentialligningerne, ogsaa tilsigter at karakterisere bevægelsen paa anden maade. Den almindelig anvendte kontinuitetsligning indeholder kun, at til ét og samme tidspunkt, naar man betragter bevægelsen i løbet af et tidselement dt, det masseelement, man regner med, er ligestort overalt i fluidet, medens intet er til hinder for, at det masseelement, man til andre tidspunkter under bevægelsen ved værdier af tidselementet kdt, forskjellige fra dt, regner med, kan have en anden værdi. Kontinuitetsligningen, som udtrykker, at elementets masse maa være konstant under bevægelsen, indeholder derimod, at man til alle tidspunkter under bevægelsen maa regne med et masseelement af én og samme værdi. Og den værdi af masseelementet, man under hele bevægelsen maa regne med, kan ikke vælges vilkaarlig. Thi kunde den vælges vilkaarlig, hvis altsaa bevægelsen var uafhængig af den værdi, man oprindelig tildelte masseelementet, saa maatte man ogsaa til forskjellige tidspunkter kunne regne med forskjellige masseelementer. Det masseelement, man regner med, maa følgelig have en bestemt værdi. Men isaafald vil masseelementet ikke længere kunne være noget masseelementet; det vil ikke kunne være en uendelig liden størrelse. Thi en saadan har ingen bestemt værdi. Skal en uendelig liden størrelse have en bestemt værdi, kan den kun være lig 0. Det er en mathematisk feil at sætte differentialforholdet af masseelementet med hensyn paa tiden lig 0, hvorved man udtrykker, at masseelementet er konstant under bevægelsen. Thi hvis en uendelig liden størrelse maa være konstant, kan den kun være lig 0. Skal masseelementet være konstant under bevægelsen, kan det kun være lig 0. Men er masseelementet 0 under bevægelsen, kan der ingen bevægelse være, der maa være ligevægt. Den kontinuitetsligning, som opstilles blandt differentialligningerne for bevægelsen og som udtrykker, at masseelementet er konstant under bevægelsen, tillægger bevægelsen kun den egenskab ikke at existere.

Er d V volumelementet og ϱ tætheden, saa er elementets masse ϱ d V. Er tversnittet F og længden af et element af banen ds, saa er $\varrho\, d V = F\, \varrho\, ds$. Betragter man et og samme tversnit, saa er F konstant og F ϱ ds er masseelementet, der skal være uforandret til ethvert tidspunkt af bevægelsen. Er ϱ konstant, maa følgelig ds have en konstant værdi under bevægelsen. Nu er ds længden af det baneelement, som i tidselementet dt gjennemstrømmes af fluidet. Da ds er konstant, blir følgelig længden af det baneelement, som i tidselementet gjennemstrømmes af fluidet, uafhængig af størrelsen af tidselementet. Dette kan kun finde sted, hvis der ingen bevægelse er.

Efter den almindelig anvendte kontinuitetsligning, der udtrykker, at i samme tid strømmer samme masse af fluidet gjennem alle tversnit, vil derimod længden af det baneelement. som i tidselementet gjennemstrømmes af fluidet, være proportional med størrelsen af det tidselement, man regner med.

Det er ligeledes en mathematisk feil, naar man ved differentiationen af volumelementet ϱ dx dy dz med hensyn paa tiden sætter $\frac{dx}{dt}$ lig hastigheden langs x=axen, $\frac{dy}{dt}$ lig hastigheden langs y=axen og $\frac{dz}{dt}$ lig hastigheden langs z=axen. Thi dx, dy og dz er bundne ved den betingelse, at ϱ dx dy dz skal være en uforanderlig størrelse, medens dt kan vælges ganske vilkaarlig. Derfor vil $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ og $\frac{dz}{dt}$ ikke have bestemte værdier, men være fuldstændig ubestemte størrelser. Følgelig vil heller ikke $\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right)$ og $\frac{d}{dz}\left(\frac{dz}{dt}\right)$ have bestemte værdier. De vil have mange forskjellige værdier, der, naar ϱ er konstant, alle maa tilfredsstille ligningen:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{dz}{dt}\right) = 0.$$

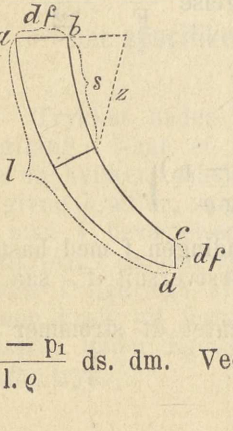
hvilket er en umulighed. Følgelig maa dx dy dz = 0.

Til bestemmelse af bevægelsen i lukkede kanaler har man de to almindelige love om tilvexten af levende kraft og af arbeidsevne. Dertil kommer en kontinuitetsligning, der udtaler, at der i samme tid strømmer den samme masse af fluidet gjennem alle tversnit. Kanalens tversnit antages lidt efter lidt at indsnevres fra overfladen til mundingen. Under ligevægten maa der paa mundingen og i modsat retning af det hydrostatiske overtryk paa mundingen virke et tryk lig det hydrostatiske overtryk. Bevægelsen indtræder ved, at der til de kræfter, som under ligevægten virker paa elementerne i mundingen, føies en kraft lig det hydrostatiske overtryk. Hastigheden, som denne kraft vilde meddele elementerne i mundingen, findes af ligningen for den levende kraft. Er mundingens tversnit f og veien, som tilbagelægges i mundingen, ds, saa er massen af det udstrømmende fludium f ϱ ds, naar ϱ er fluidets tæthed. Kraften, som tilføies og frembringer bevægelsen, er Hg ϱ f $=$ det statiske overtryk. Kaldes hastigheden v, saa blir:

$$H g \varrho f ds = \frac{1}{2} f \varrho ds v^2$$
$$Hg = \frac{1}{2} v^2$$
$$v = \sqrt{2 g H}.$$

Hastigheden af det udstrømmende vand er saaledes lige fra bevægelsens begyndelse lig $\sqrt{2 g H}$. Men den mængde, som strømmer ud med denne hastighed, er i begyndelsen uendelig liden. Paa grund af kontinuiteten maa nemlig tilstrømningsmængden til mundingen være ligesaa stor som den mængde, der strømmer ud. Til bestemmelse af tilstrømningshastigheden til mundingen har man som givne kræfter differentsen mellem overfladetrykket p_0 og modtrykket i udmundingen p_1 samt tyngden.

Arbeidet af trykdifferentsen $p_0 - p_1$ faaes ved at tage et element af tversnittet i mundingen df og det tilsvarende tversnit i overfladen. Er nu l længden af den bane, elementet beskriver fra overfladen til mundingen, saa er df. l. ϱ massen af det fluidum, hvorpaa kraften df $(p_0 - p_1)$ virker. Dens acceleration blir følgelig $\frac{df. (p_0 - p_1)}{df. l. \varrho} = \frac{p_0 - p_1}{l. \varrho}$.



Hvert af elementerne i a b c d blir saaledes paavirket af en kraft, hvis acceleration er $\frac{p_0 - p_1}{l \varrho}$.

Kraftens retning er banens retning.

Vælges nu z $=$ axen positiv nedover og begyndelsespunktet i overfladen, saa vil et element i afstanden z, hvis masse er dm, paavirkes af tyngdekraften, hvis acceleration er g og retning langs z $=$ axen, og trykdifferentsen, hvis retning er langs banen. Arbeidet af tyngdekraften i tidselementet blir dm. g dz og arbeidet af trykdifferentsen

$\frac{p_0 - p_1}{l. \varrho}$ ds. dm. Ved integration fra z til h, hvor h er overfladens høide over mundingen, og z antages mindre end h, og fra s til l faaes kræfternes arbeide, og man faar ifølge ligningen for den levende kraft:

$$\int_z^h g.\,dz + \int_s^l \frac{p_0 - p_1}{l.\,\varrho}\,ds = {}^1/_2\, v_z^2$$

$$\text{naar } v_z = 0, \text{ naar } t = 0$$

v_z er den hastighed, som tversnittet i afstanden z fra overfladen erholder i mundingen, naar dets oprindelige hastighed var nul. Man finder:

$${}^1/_2\, v_z^2 = g\,(h - z) + \frac{p_0 - p_1}{l.\,\varrho}\,(l - s).$$

Sættes $z = 0$, faaes tilstrømningshastigheden til mundingen, naar overfladetversnittet har naaet denne. Denne blir:

$${}^1/_2\, v^2 = gh + \frac{p^0 - p_1}{\varrho},$$

og følgelig lig udløbshastigheden; bevægelsen er da permanent. Overfladetrykket p_0 indbefatter ogsaa trykket af det til overfladen strømmende vand. Er dettes hastighed v_0, saa er — hvad senere paavises — dets tryk, naar tilstrømningen foregaar langs hele overfladen, lig $\frac{v_0^2\,\varrho}{2}$. Indsættes $p_0 = p_0' + \frac{v_0^2\,\varrho}{2}$, faaes:

$$v^2 - v_0^2 = 2\,g\left(h + \frac{(p'_0 - p_1)}{g\,\varrho}\right).$$

Er overfladens tversnit F og tversnittet af det tilstrømmende vand f_1, saa er, naar tilstrømningshastigheden er v_0, den af det tilstrømmende vand frembragte trykforøgelse $\frac{f_1}{F}\,\frac{v_0^2\,\varrho}{2}$ og

$$p_0 = p_0' + \frac{f_1}{F}\,\frac{v_0^2\,\varrho}{2}.$$

Man faar da:

$$v^2 - v_0^2\frac{f_1}{F} = 2g\left(h + \frac{(p'_0 - p_1)}{g\,\varrho}\right).$$

Det vandvolum, som strømmer til mundingen f med hastigheden v_z, er $f_s\,ds$. Er det effective udløbstversnit f', saa er $v_z\,f = v\,f'$, altsaa $f' = \frac{v_z}{v}\,f$. I tidselementet dt strømmer ud en vandmængde:

$$f' \, v \, dt = f_s \, ds.$$

$$\frac{v_z}{v} f. \, v. \, dt = v_z \, f. \, dt = f_s \, ds.$$

$$dt. = \frac{1}{f} \frac{f_s \, ds}{v_z} = \frac{1}{f} \frac{f_s. \, ds.}{\sqrt{2\,g\,(h-z) + \frac{2\,(p_0 - p_1)}{l.\,\varrho}(l - s)}}.$$

$$t = \frac{1}{f} \int_s^l \frac{f_s. \, ds.}{\sqrt{2g\,(h-z) + \frac{2\,(p_0 - p_1)}{l.\,\varrho}(l - s)}},$$

der gir tiden, inden tversnittet f_s naar mundingen. Sættes som nedre grænse $s = 0$, faaes tiden til indtrædelsen af permanens.

Da elementets bane og dennes længde er ubekjendte, kan opgaven kun løses tilnærmelsesvis. Sættes f. ex. $s = z$, $ds = dz$, faaes tiden til indtrædelsen af permanens:

$$t = \frac{1}{f} \int_0^h \frac{f_z \, dz}{\sqrt{2\,g\,(h-z) + \frac{2\,(p_0 - p_1)}{l.\,\varrho}(h - z)}}.$$

Er $f_z = f_0 - az$, hvor f_0 er overfladetversnittet, og $a = \frac{f_0 - f}{h}$, blir:

$$t = \frac{2}{3} \frac{(f_0 + 2f)}{f} \frac{h}{\sqrt{2g\left(h + \frac{(p_0 - p_1)}{g\,\varrho}\right)}}.$$

Det specifike tryk under hastighedsforøgelsen.

Trykket under hastighedsforøgelsen findes ved følgende betragtning. Naar et punkt, som er forbundet med andre punkter paa en hvilkensomhelst maade, antager en vis bevægelse, paavirket af givne kræfter, saa kan denne bevægelse tænkes frembragt ved, at man i bevægelsens retning tilføier en kraft, lig den totale kraft, og i modsat retning af bevægelsen en lige stor kraft, der holdes i ligevægt af de givne kræfter og forbindelseskræfterne. Denne kraft vil formindske det tryk, som paa grund af forbindelserne under ligevægten finder sted i punktet, med den totale krafts tryk.

Er $P_1, P_2 \ldots P_n$ de paa punkterne virkende givne kræfter under ligevægten, saa kan tilvexten i hastighed tænkes frembragt ved, at man til de givne kræfter føier de totale kræfter $x_1, x_2 \ldots x_n$ i bevægelsens retning. Men i saafald maa man, da de givne kræfter ikke forandres, ogsaa tilføie kræfterne $-x_1, -x_2 \ldots -x_n$, der virker i modsat retning af bevægelsen og følgelig vil formindske størrelsen af det tryk, som paa grund af forbindelserne finder sted i bevægelsens retning. Da nu trykket i et punkt ved fluiderne er ligestort i alle retninger, vil følgelig det tryk, som finder sted under ligevægten, under hastighedsforøgelsen formindskes med en størrelse lig trykket af den totale kraft i punktet. Ved bevægelsen optræder en reaktionskraft, af størrelse lig den totale kraft, og med dennes tryk formindskes det tryk, som paa grund af forbindelserne finder sted under ligevægten. Trykket under hastighedsforøgelsen findes derfor efter følgende sats:

Ved fluidernes bevægelse finder man det specifike tryk under hastighedsforøgelsen, naar man fra det tryk, der paa grund af forbindelserne finder sted i ligevægten, subtraherer trykket af den totale kraft, der bestemmes af den givne hastighedsforøgelse.

Er hastigheden i et tversnit v_z, saa er massen af det i et sekund gjennem et element af tversnittet df strømmende fluidum ϱ d f v_z, og da accelerationen er lig hastigheden v_z, saa blir den totale kraft i punktet ϱ df. v_z^2 og denne krafts tryk paa fladeenheden $\varrho\, v_z^2$.

Ved udløbet, hvor $v = \sqrt{2\,g\,H}$, er ved fuldt udløb den totale krafts tryk 2 Hg ϱ, følgelig dobbelt saa stort som det statiske overtryk Hg ϱ. Trykket under ligevægten er Hg $\varrho + p_1$; under bevægelsen blir det følgelig p_1 — Hg ϱ ved mundingen.

Foregaar udløbet under kontraktion med kontraktionskoefficienten m, saa er den totale krafts tryk ved mundingen lig 2m Hg ϱ. Følgelig vil det specifike tryk p blive:

$$p = p_1 + Hg\,\varrho - 2m\,Hg\,\varrho = p_1 - (2m - 1)\,Hg\,\varrho.$$

Arbeidsevnen

af det udstrømmende vand findes af loven for tilvexten af arbeidsevne. Den tilføiede kraft er f. Hg ϱ, dens acceleration v og følgelig den vei, som tilbagelægges til meddelelse af accelerationen v, $^1/_2$ v. Kraftens arbeide blir da f. Hg $\varrho\,^1/_2\,v = {}^1/_4\,f\,\varrho\,v^3$. Dette er det strømmende fluidums arbeidsevne. Den levende kraft ved udløbet er derimod $^1/_2\,f\,\varrho\,v^3$.

Fluidets arbeidsevne er saaledes ved fuldt udløb blot lig halvparten af den levende kraft. Foregaar derimod udløbet under kontraktion, blir ved samme mundingstversnit arbeisevnen uforandret, medens den levende kraft og mængden af det udstrømmende fluidum formindskes. Arbeidsevnen pr. vægtsenhed af det udstrømmende fluidum forøges saaledes ved kontraktionskoefficientens aftagen. Arbeidsevnen pr. vægtsenhed fluidum blir omvendt proportional med kontraktionskoefficienten.

Arbeidsevnen af det strømmende vand findes ogsaa uden anvendelse af satsen om tilvexten i arbeidsevne ved betragtning af det udstrømmende fluidums specifike tryk p. Hvis dette er lig det ydre modtryk p_1, blir selvfølgelig arbeidsevnen lig den levende kraft. Er derimod p mindre end p_1, $p = p_1 - (2m - 1) Hg\varrho$, blir arbeidsevnen formindsket med arbeidet af $(2m - 1) Hg\varrho$. Dette er $\frac{1}{2} f v (2m - 1) Hg\varrho$, da nemlig $\frac{1}{2} v$ er den vei, der tilbagelægges til meddelelse af accelerationen v. Arbeidsevnen A blir følgelig:

$$A = \frac{1}{2} m v^3 f\varrho - \frac{1}{2} v (2m - 1) Hg\varrho f.$$
$$= \frac{1}{2} m f\varrho v^3 - \frac{1}{2} v (2m - 1) \frac{v^2}{2g} f. g\varrho.$$
$$= \frac{1}{4} v^3 f\varrho (2m - (2m - 1)).$$
$$= \frac{1}{4} v^3 f\varrho.$$

Naar trykket i det udstrømmende vand er lig det ydre modtryk p_1, blir den totale kraft lig det hydrostatiske overtryk ved mundingen. Den frembragte hastighedsforøgelse i mundingen er isaafald kun en virkning af det hydrostatiske overtryk, altsaa af de kræfter, ved hvis tilføielse bevægelsen fremkaldes. Størrelsen af de under ligevægten paa fluidets molekyler virkende givne kræfter — tyngdekraften — forandres isaafald ikke under hastighedsforøgelsen. De paa molekylerne virkende tyngdekræfter vil ogsaa under hastighedsforøgelsen holdes i ligevægt. Hvis derimod trykket i det udstrømmende vand er mindre end det ydre modtryk p_1, saa maa den totale kraft ved udløbet være større end det hydrostatiske overtryk. Da nu det specifike tryk

$$p = p_1 - (2m - 1) Hg\varrho$$

vil p være mindre end p_1, naar kontraktionskoefficienten m er større end $\frac{1}{2}$, hvilket ved frit udløb i praxis altid er tilfældet, naar bevægelsen er blevet permanent. I almindelighed vil derfor den totale kraft være større end de kræfter, ved hvis tilføielse bevægelsen fremkaldes. Størrelsen af de paa molekylerne virkende tyngdekræfter, som er i ligevægt, er isaafald under hastighedsforøgelsen mindre end under ligevægten, idet de delvis medvirker ved hastighedsforøgelsen. Medens vandets vægt, naar det specifike tryk er lig p_1, er uforandret den samme under hastighedsforøgelsen som under ligevægten, vil derimod vægten, naar det specifike tryk er mindre end p_1, vise sig formindsket under hastighedsforøgelsen. Var det specifike tryk større end p_1, vilde tyngdens acceleration og vægten vise sig forøget under udstrømningen og den levende kraft formindskes. Dette vil være tilfældet ved frit udløb, før bevægelsen er blevet permanent. I dette tilfælde vil ikke de tilføiede kræfter i sin helhed virke til fremkaldelse af de udstrømmende elementers hastighed, men delvis holdes i ligevægt af forbindelserne. De paa punkterne virkende kræfter, som holdes i ligevægt af forbindelserne, vil under hastighedsforøgelsen være større end under ligevægten.

Naar tyngdens acceleration under udstrømningen viser sig forandret, vil ogsaa udløbsmængden forandres. Volumet af det udstrømmende fluidum vil i alle tilfælde være saa stort, at ved samme hydrostatiske overtryk vægten af det i et sekund udstrømmende fluidum blir uforandret, naar ved bestemmelsen af vægten tyngdens acceleration tildeles den værdi, den har under udløbet. Vi vil betegne accelerationen under udløbet med G og under ligevægten med g. Er hastigheden v, og tversnittet f, saa er udløbsvolumet m f v og vægten m f v. G. ϱ. Nu vil G antage værdien g, naar m = $^1/_2$. Man faar følgelig ligningen:

$$m f v. G. \varrho = {}^1/_2 f. v. g. \varrho$$

hvoraf:

$$G = \frac{1}{2m} g.$$

Af denne ligning findes tyngdens acceleration under udløbet. Som man ser, vil G antage værdien ∞, naar m = 0, altsaa ved udstrømningens begyndelse, og aftage, naar m voxer, indtil G = $^1/_2$ g, naar m = 1, altsaa naar udløbet foregaar uden kontraktion.

Før bevægelsen er blevet permanent, er forholdet dette, at det hydrostatiske overtryk kun delvis virker til fremkaldelse af udløb. Delvis virker det til at fremkalde hastighedsforøgelsen af fluidet i karret, og i begyndelsen vil den største del af det hydrostatiske overtryk medgaa dertil. Først naar bevægelsen er blevet permanent og hastighedsforøgelsen af fluidet i karret er ophørt, kan det hydrostatiske overtryk i sin helhed virke ved udløbet.

Mindre end $^1/_2$ g vil G ikke kunne blive, naar udløbet foregaar frit fra et enkelt kar. Skal G blive mindre end $^1/_2$ g, maa foruden udløbsmængden ogsaa udløbshastigheden forøges. Dette finder sted, dersom der i en forsnevring af karret frembringes en hastighed, som er større end den, som betinges af den givne trykhøide i vedkommende forsnevring. Denne forøgelse af hastigheden i forsnevringen vil da ogsaa fremkalde en yderligere formindskelse af det specifike tryk af det gjennem forsnevringen strømmende fluidum.

Forandringen af tyngdens acceleration vil kun finde sted, saalænge hastighedsforandringen foregaar. Naar hastighedstilvexten er ophørt, vil accelerationen G atter antage værdien g, og samtidig det specifike tryk p antage værdien p_1. Denne forandring af G og p maa medføre en forandring af den meddelte hastighed v. Naar G atter antager værdien g, vil vægten af det fluidum, som er strømmet ud, forandres i forholdet $\frac{g}{G}$. Er g større end G, vil vægten forøges. Forholdet blir da det samme, som om man til det fluidum, som er i bevægelse med hastigheden v, føier en ny mængde fluidum, som er i hvile, og som skal meddeles hastighed af det strømmende fluidum. Dettes hastighed maa derfor formindskes. Er derimod g mindre end G, saa blir forholdet dette, at endel af de kræfter, som under hastighedsforøgelsen holdtes i ligevægt, blir frigjort og forøger den meddelte hastighed. Er g større end G, finder man den nye hastighed w ved at bemærke, at arbeidsevnen af et fluidum i bevægelse er lig dets levende kraft, naar dets specifike tryk er lig det ydre tryk p_1. Massen af det pr. sekund udstrømmende fluidum er $m f v \varrho$, følgelig den levende kraft, naar det har antaget det specifike tryk p_1 og hastigheden w:

$$\frac{1}{2} m f v \varrho w^2.$$

Nu er den levende kraft, naar hastigheden er blevet w — den effektive levende kraft — lig arbeidsevnen $\frac{1}{4} f v \varrho v^2$. Altsaa

$$\frac{1}{2} m f v \varrho w^2 = \frac{1}{4} f v \varrho v^2$$

hvoraf:

$$w^2 = v^2 \frac{1}{2m}$$

og naar $\frac{1}{2m} = \frac{G}{g}$ indsættes:

$$w^2 = v^2 \frac{G}{g}.$$

Den hastighed, som fluidet antager, naar selve hastighedsforøgelsen er ophørt, er saaledes $w = v\sqrt{\frac{1}{2m}}$ Den givne trykhøide $\frac{v^2}{2g}$ blir saaledes efter hastighedsforøgelsens ophør forandret til $\frac{w^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \frac{1}{2m}$. Naar m er større end $\frac{1}{2}$, hvad der altid er tilfældet, naar bevægelsen er blevet permanent, vil der saaledes lides et tab i trykhøide, der voxer med m. Det er derfor ufordelagtig at anvende afrundede mundstykker og fuldt udløb ved de hydrauliske apparater, naar man benytter det strømmende vands tryk. Man bør tvertimod indrette apparaterne saaledes, at udløbet foregaar under den størst mulige kontraktion. Effekten E, der er forholdet mellem den effektive levende kraft eller arbeidsevnen og den levende kraft under udløbet, blir:

$$E = \frac{\frac{1}{4} f \varrho v^3}{\frac{1}{2} m f \varrho v^3} = \frac{1}{2m}.$$

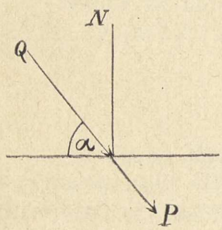
Væskers stød.

Væskers stød maa betragtes som stød af uelastiske legemer. Ved lodret stød mod et hvilende plan, hvor de stødende partikler kan frit undvige, tabes derfor hele den levende kraft og arbeidsevne. Stødtrykket blir da ligt den kraft, som udfordres for at berøve fluidet dets levende kraft og arbeidsevne i samme tid som den, hvori den kraft, véd hvis tilføielse bevægelsen fremkaldes, meddelte den. Stødtrykket ved lodret stød mod hvilende plan blir følgelig lig den bevægende kraft, altsaa lig det statiske overtryk paa mundingen. Kaldes stødtrykket P, blir:

$$P = Hg\varrho f = fg\varrho \frac{v^2}{2g}.$$

Undviger planet med hastigheden c, saa blir det lodrette stødtryk

$$P = \frac{(v - c)^2}{2g}, fg\varrho.$$



Støder et fluidum, hvis lodrette stødtryk er Q, mod et plan under vinkelen α mod planet, saa opløses stødtrykket Q i det mod planet P lodrette stødtryk N og et stødtryk langs planet, der blir uvirksomt. Man faar da:

$$N = Q \sin \alpha.$$

Undviger planet i Q's retning, opløses N i en kraft P i bevægelsesretningen og en kraft S lodret bevægelsesretningen. Man faar:

$$P = N \sin \alpha = Q \sin^2 \alpha.$$
$$S = N \cos \alpha = Q \sin \alpha \cos \alpha = {}^1/_2\, Q \sin 2\alpha.$$

Er den stødte flade hvilende, saa er $Q = \frac{v^2}{2g} fg\varrho$. Undviger derimod fladen med hastighed c i Q's retning, saa er $Q = \frac{(v - c)^2}{2g} fg\varrho$.

Ved den foran fremsatte stødtheori er det forudsat, at det stødende fluidum, idet det forlader den stødte flade, ikke udøver nogen reaktion, hvorved stødtrykket paavirkes. Er denne et plan, forudsættes det følgelig, at de stødende partikler undviger i planets retning. Hvis fluidet derimod, idet det forlader planet, danner en vinkel α med dette, vil reaktionen af de undvigende partikler paavirke stødtrykket. Antager man, at hastigheden af det undvigende fluidum er lig stødhastigheden, og er dennes trykhøide H, saa blir ogsaa trykhøiden for det undvigende fluidem H og dets reaktionstryk $Hfg\varrho$. Dette opløses i et tryk $Hfg\varrho \cos \alpha$ i planets retning, der blir uvirksomt, og et tryk $Hfg\varrho \sin \alpha$ i samme eller modsat retning af stødtrykket. Det effektive stødtryk blir da:

$$H f g \varrho (1 \pm \sin \alpha),$$

hvor fortegnet — tages, naar det undvigende fluidums reaktionstryk virker modsat stødtrykket.

Man kan ogsaa for at finde stødtrykket benytte den almindelige methode, idet man søger differentsen mellem fluidets arbeidsevne — den effektive levende kraft — før og efter stødet istedetfor, i overensstemmelse med den nuværende lære, at søge differentsen mellem den levende kraft før og efter stødet.

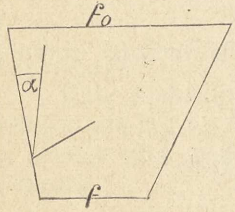
I almindelighed vil den hastighed, hvormed det undvigende fluidum forlader den stødte flade, være meget liden paa grund af friktionen ved bevægelsen langs fladen. Som følge deraf vil ogsaa reaktionstrykket og arbeidsevnen af det undvigende fluidum være af liden betydning.

Støder et fluidum paa et andet fluidum, vil virkningen af stødet blive den samme som ved stød mod et fast legeme. Er stødtrykket paa fladeenheden p, tversnittet af det stødende fluidum f og tversnittet af det stødte fluidum F, vil følgelig den forøgelse af trykket paa fladeenheden, som ved stødet meddeles det stødte fluidum, være $\frac{f}{F}$ p. Staar det stødende og det stødte fluidum i sammenhængende forbindelse med hinanden, vilde i ligevægtstilstanden et tryk p i tværsnittet f have hidført et tryk p paa fladeenheden af det stødte fluidum. Da F altid maa være større end f, hvis der ved en sammenhængende forbindelse skal frembringes stød, vil saaledes ved stødet trykket i det stødte fluidum formindskes. Ved tversnitsforandringer, hvorved stød fremkommer, lides følgelig et trykhøidetab ved mundingen.

Af den her fremsatte stødtheori følger, at stødtrykket er uafhængigt af kontraktionskoefficienten paa samme maade som arbeidsevnen. Ligeledes vil reaktionstrykket være uafhængigt af kontraktionskoefficienten og i alle tilfælde ligt det statiske overtryk paa mundingen.

Kontraktionskoefficienten.

Naar et fluidum bevæger sig langs en plan væg, der med fluidets bevægelsesretning danner vinkelen α, vil der fremkomme stød af fluidet mod væggen. Er hastigheden, hvormed fluidet bevæger sig, w', saa er stødtrykket pr. fladenhed $\frac{w'^2}{2g} g \varrho$. Dette opløses i normalstødet $\frac{w'^2}{2g} g \varrho \sin \alpha$ og et tryk langs væggen $\frac{w'^2}{2g} g \varrho \cos \alpha$, der blir uvirksomt. Stødtrykket lodret væggen opløses i et tryk



langs bevægelsesretningen $\frac{w'^2}{2g}\sin^2\alpha\, g\, \varrho$ og et tryk lodret paa denne, der blir uvirksomt. Der opstaar saaledes ved stødet mod væggen et tryk i retning af bevægelsen og da de stødende partikler ikke frit kan undvige, ogsaa i modsat retning af bevægelsen af størrelse $\frac{w'^2}{2g}\sin^2\alpha\, g\, \varrho$. Den dertilsvarende trykhøide er $\frac{w'^2}{2g}\sin^2\alpha$. Hvis hastigheden i karret uden stød vilde være w, følgelig den dertil svarende trykhøide $\frac{w^2}{2g}$, faar man ligningen:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{w'^2}{2g} + \frac{w'^2}{2g}\sin^2\alpha,$$

hvoraf

$$w' = w\sqrt{\frac{1}{1 \sin^2\alpha}}$$

Paa grund af stødet mod karrets vægge formindskes hastigheden i karret og tilstrømningshastigheden til mundingen. Derimod formindskes ikke trykhøiden i mundingen og udløbshastigheden, som bestemmes deraf. Thi stødtrykket, som formindsker den totale kraft af fluidet i karret, forøger i samme forhold fluidets specifike tryk, saaledes at fluidets tryk ligeoverfor udløbsmundingen uforandret blir lig det statiske overtryk. Ved mundingen blir saaledes $w = v$, og man har tilstrømningshastigheden

$$v' = v\sqrt{\frac{1}{1 + \sin^2\alpha}}.$$

Den del af fluidet, som befinder sig over selve mundingen f, vil ikke støde mod væggen og vil følgelig have en tilstrømningshastighed v.

Tilstrømningshastigheden til mundingen v'' blir saaledes bestemt af ligningen:

$$v'' f_0 = v'(f_0 - f) + v f.$$

$$v'' = \frac{v'(f_0 - f) + v f}{f_0}$$

$$= v\,\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{1+\sin^2\alpha}}\,(f_0 - f) + f\right)}{f_0}$$

Da man ved kontraktionskoefficienten m forstaar forholdet $\frac{v''}{v}$, blir denne:

$$m = \frac{\sqrt{\frac{1}{1+\sin^2\alpha}}\,(f_0 - f) + f}{f_0}$$

Er $\alpha = 90^0$, altsaa ved udløb af munding i plan, tynd væg, er $m = \frac{\sqrt{1/2}\,(f_0 - f) + f}{f_0}$

Er f liden i sammenligning med f_0, blir $m = \sqrt{1/2}$. Har væggen en saadan helding, at fluidet maa bevæge sig opad for at naa mundingen, blir den totale kraft af fluidet i karret formindsket i endnu høiere grad. Paa grund af stødet mod væggen har man som i foregaaende tilfælde:

$$\frac{w'^2}{2\,g} = \frac{w^2}{2\,g}\,\frac{1}{1 + \sin^2\alpha}.$$

Er w'' den hastighed, hvormed vandet bevæger sig opad mod mundingen, saa er $\frac{w''^2}{2\,g}$ den dertil svarende hastighedshøide. Da nu fluidet maa bevæge sig med samme hastighed nedad mod væggen, altsaa med en hastighedshøide $\frac{w''^2}{2\,g}$, og det desuden maa overvinde trykhøiden af det fluidum, som bevæger sig opad, maa trykhøiden af det fluidum, som støder mod væggen $\frac{w'^2}{2\,g}$ være lig $2\,\frac{w''^2}{2\,g}$ og

$$w'' = w'\sqrt{1/2}$$

$$w'' = w\sqrt{1/2}\sqrt{\frac{1}{1 + \sin^2\alpha}}.$$

Da tilstrømningshastigheden af det fluidum, som befinder sig over selve mundingen, er v, blir kontraktionskoefficienten den samme som i foregaaende tilfælde, naar man blot multipliserer

$$\sqrt{\frac{1}{1 + \sin^2\alpha}} \text{ med } \sqrt{1/2}.$$

Man faar følgelig i dette tilfælde:

$$m = \frac{\sqrt{1/2}\sqrt{\frac{1}{1 + \sin^2\alpha}}\,(f_0 - f) + f.}{f_0}$$

Er $\alpha = 90^0$, blir

$$m = \frac{1/2\,(f_0 - f) + f}{f_0} = \frac{1/2\,(f_0 + f)}{f_0}.$$

Naar kontraktion finder sted, er den totale krafts tryk ved udløbet $2m\,Hg\,\varrho$. Under ligevægten er trykket $Hg\,\varrho + p_1$, hvor p_1 er det ydre modtryk. Under bevægelsen blir saaledes trykket i fluidet

$$p = p_1 - Hg\,\varrho\,(2m - 1).$$

Trykket blir 0 under bevægelsen, naar

$$p_1 - Hg\varrho(2m - 1) = 0.$$

Er saaledes $m = 1$, altsaa udløbet fuldt, blir trykket 0, naar $p_1 = Hg\varrho$; er $m = {}^2/_3$, blir trykket 0, naar $p_1 = {}^1/_3\, Hg\varrho$.

Mindre end nul kan trykket ikke blive. Det specifike tryk er nemlig lig differensen mellem det tryk, de givne kræfter udøver under ligevægten, og den totale krafts tryk. Denne differens kan ikke blive negativ, da den totale krafts tryk ikke kan blive større end det tryk, de givne kræfter udøver, idet nemlig den totale krafts tryk er fremkaldt af de givne kræfter. Blir $p_1 - Hg\varrho(2m - 1)$ negativ, maa tilstrømningshastigheden til mundingen formindskes, og kontraktionskoefficienten m maa antage en værdi, som er mindre end den af karrets form bestemte. Kontraktionskoefficienten findes i dette tilfælde af ligningen:

$$p_1 - Hg\varrho(2m - 1) = 0,$$

hvoraf:

$$m = \frac{p_1 + Hg\varrho}{2\,Hg\varrho}.$$

Er $p_1 = 0$, foregaar altsaa udløbet i lufttomt rum, blir $m = {}^1/_2$.

Tversnitsforandringer.

Vi skal først betragte det tilfælde, at tversnitsforandringen er pludselig, hvorved stød fremkommer af fluidet i forsnevringen mod fluidet i det udvidede tversnit. Man har hidtil begaaet den feil at anse dette stød som stød mod et legeme, der er i bevægelse. I virkeligheden maa det betragtes som stød mod et legeme, der er i hvile Thi det tversnit af karret, som stødes, forandrer ikke beliggenhed i forhold til det stødende fluidum. Partiklerne i et tversnit af det stødte fluidum vil kun i uendelig kort tid træffes af det stødende fluidum. De partikler, som i en endelig — om end nok saa kort — tid senere træffes af det stødende fluidum, er andre end de først trufne.

Endnu er feil er der ved den mathematiske behandling af problemet om trykhøidetabet ved tversnitsforandringer. Idet det hurtigere strømmende fluidum i det forsnevrede tversnit støder paa det langsommere strømmende i det udvidede tversnit, betragter man dette som stød af et legeme af uendelig liden masse mod et legeme, hvis masse er endelig, og beregner trykhøidetabet derefter. I virkeligheden faar man her stød mellem legemer, hvis masser er lige store, og tabet i levende kraft ved stødet skulde blot være halvparten af det, den nuværende theori regner med. Man begaar den feil at regne med den masse, som i en uendelig kort tid strømmer gjennem det stødende tversnit, medens man for det stødte tversnits vedkommende regner med den masse, som i en endelig tid gjennemstrømmer dette. I samme tid vil der gjennem det stødende tversnit og det stødte tversnit strømme netop samme masse, og man faar stød mellem ligestore masser.

Er ved en forsnevring trykket ved vandets overflade p_0, hastigheden i forsnevringen v_1, kontraktionskoefficienten m_1, forsnevringens tversnit F_1, det efterfølgende tversnit T_1 og den givne trykhøide h_1, saa er stødtrykket mod det efterfølgende fluidum

$$m_1 v_1^2 \varrho F_1,$$

under den forudsætning, at det specifike tryk er lig det ydre modtryk. I saafald vil nemlig stødtrykket af en vandmængde $1/2\, F_1 v_1$ være $1/2\, F_1 v_1^2 \varrho$ og følgelig af vandmængden $m_1 F_1 v_1$ lig $m_1 v_1^2 F_1 \varrho$.

Er det efterfølgende tversnit T_1, vil ved stødet fremkomme et tryk paa det efterfølgende fluidum, hvilket pr. fladeenhed blir lig:

$$m_1 v_1^2 \varrho \frac{F_1}{T_1}.$$

Nu er det stødende fluidums specifike tryk lig

$$p_0 + h_1 g \varrho - m_1 v_1^2 \varrho.$$

Hermed forøges det efterfølgende fluidums specifike tryk, hvilket følgelig blir:

$$p_0 + h_1 g \varrho - m_1 v_1^2 \varrho + m_1 v_1^2 \varrho \frac{F_1}{T_1} =$$

$$= p_0 + h_1 g \varrho - m_1 v_1^2 \varrho \left(1 - \frac{F_1}{T_1}\right).$$

Uden stød vilde trykket være $p_0 + h_1 g \varrho$. Ved stødet opstaar følgelig et tab af tryk lig $m_1 v_1^2 \rho \left(1 - \frac{F_1}{T_1}\right)$. Divideres dette med $g \varrho$, faaes den dertil svarende trykhøide $m_1 \frac{v_1^2}{g}\left(1 - \frac{F_1}{T_1}\right)$. Ved forsnevringen opstaar følgelig et tab i trykhøide lig:

$$m_1 \frac{v_2^2}{g}\left(1 - \frac{F_1}{T_1}\right).$$

Er ved en efterfølgende forsnevring hastigheden v_2, kontraktionskoefficienten m_2, forsnevringens tversnit F_2 og det efterfølgende tversnit T_2, vil denne forsnevring frembringe et trykhøidetab lig:

$$m_2 \frac{v_2^2}{g}\left(1 - \frac{F_2}{T_2}\right).$$

Og saaledes videre. Man faar den tilbageblevne trykhøide for udløbsmundingen F, hvor udløbshastigheden er v og kontraktionskoefficienten m, lig:

$$H - m_1 \frac{v_1^2}{g}\left(1 - \frac{F_1}{T_1}\right) - m_2 \frac{v_2^2}{g}\left(1 - \frac{F_2}{T_2}\right) \dots$$

$$\dots - m_n \frac{v_n^2}{g}\left(1 - \frac{F_n}{T_n}\right) = \frac{v^2}{2g}.$$

Nu er

$$m\, v\, F = m_1\, v_1\, F_1 = m_2\, v_2\, F_2 = \dots m_n\, v_n\, F_n,$$

følgelig:

$$v_1 = v \frac{m\,F}{m_1 F_1};\ v_2 = v \frac{m\,F}{m_2 F_2};\ \dots\ v_n = v \frac{m\,F}{m_n\, F_n}.$$

Indsættes dette, faaes:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{H.}{1 + 2\,m_1\left(\frac{m\,F}{m_1\,F_1}\right)^2\left(1 - \frac{F_1}{T_1}\right) + \dots 2m_n\left(\frac{m\,F}{m_n\ F_n}\right)^2\left(1 - \frac{F_n}{T_n}\right)}.$$

Er $\frac{F_1}{T_1}$, $\frac{F_2}{T_2}$ ... $\frac{F_n}{T_n}$ meget smaa størrelser, faaes:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{H.}{1 + 2m_1\left(\frac{m\,F}{m_1\,F_1}\right)^2 + \dots 2m_n\left(\frac{m\,F}{m_n\ F_n}\right)^2}.$$

Er tversnitsforandringen ikke pludselig, men tversnittet F_1 lidt efter lidt udvides til tversnittet T_1, saa er, naar T_x betegner et vilkaarligt tversnit mellem F_1 og T_1 og m_x kontraktionskoefficienten og v_x hastigheden i tversnittet: $T_x = F_x + d\,F_x$ og kontraktionskoefficienten $m_x = 1$. Trykhøidetabet vil da være:

$$\int_{F_1}^{T_1} \frac{v_x^2}{g}\,\frac{d\,F_x}{F_x + d\,F_x}.$$

Da nu $m\,F\,v = v_x\,F_x$, saa blir:

$$v_x = v \frac{m\,F}{F_x}.$$

Indsættes dette, faaes trykhøidetabet lig:

$$\int_{F_1}^{T_1} \frac{v^2}{g}\,\frac{(m\,F)^2}{F_x^2}\,\frac{d\,F_x}{F_x + d\,F_x} = \frac{v^2}{g}(m\ F)^2 \int_{F_1}^{T_1} \frac{d\,F_x}{F_x^3} =$$

$$\frac{v^2}{2g}(m\ F)^2\left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{T_1^2}\right) = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{m\,F}{F_1}\right)^2\left(1 - \left(\frac{F_1}{T_1}\right)^2\right).$$

Hvis med kontraktionskoefficienten $m_1 = 1$ tversnittet F_1 pludselig gaar over i tversnittet T_1, blir trykhøidetabet:

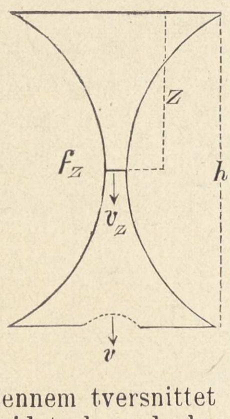
$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{m\,F}{F_1}\right)^2 2\left(1 - \frac{F_1}{T_1}\right).$$

Divideres disse udtryk, faaes:

$$\frac{1-\left(\frac{F_1}{T_1}\right)^2}{2\left(1-\frac{F_1}{T_1}\right)} = \frac{1+\frac{F_1}{T_1}}{2}.$$

Trykhøidetabet ved en ikke pludselig tversnitsforandring er følgelig lig trykhøidetabet ved en pludselig med kontraktionskoefficienten 1, multipliceret med $\frac{1+\frac{F_1}{T_1}}{2}$. Er $\frac{F_1}{T_1}$ liden, blir trykhøidetabet ved en ikke pludselig tversnitsforandring lig halvparten af trykhøidetabet ved en pludselig med kontraktionskoefficienten 1.

Den nuværende lære om trykhøidetabet ved tversnitsforandringer medfører, at der i forsnevringer kan fremkomme hastigheder større end den, der bestemmes af den givne trykhøide ved mundingen. Dette vil saaledes være tilfældet, naar forsnevringen er afrundet og er af mindre tversnit end mundingens, idet den gjældende lære ved afrundet forsnevring intet tab kjender. Har man en afrundet forsnevring i afstanden z fra overfladen med et tversnit f_z, mindre en mundingens tversnit f, saa vil hastigheden ved udløbet være mindre en hastigheden i forsnevringen. Er h den givne trykhøide ved mundingen, v udløbshastigheden og v_z hastigheden i forsnevringen, saa vil $v = \sqrt{2 g h}$ og $v_z > v$. Massen af det udstrømmende fluidum er $m f v \varrho$, og dette er ogsaa massen af det fluidum, der gjennemstrømmer tversnittet f_z. Den levende kraft af det gjennem tversnittet f_z strømmende fluidum blir da ogsaa større end fluidets levende kraft ved udløbet.



$$^1/_2\ m\ f\ v\ \varrho\ v_z^2 > {}^1/_2\ m\ f\ v\ \varrho\ v^2.$$

Efter satsen om tilvexten af levende kraft maa følgelig de givne kræfters arbeide være negativt, naar fluidet bevæger sig fra tversnittet f_z til mundingen. Er nu overfladetrykket lig det ydre tryk ved mundingen, saa er trykkets arbeide nul. Den acceleration, trykket meddeler fluidets molekyler, er nul. De givne kræfter er saaledes tyngdekraften, og dennes arbeide maa være negativt under fluidets bevægelse fra tversnittet f_z til mundingen. Men isaafald maa selve tyngdekraften blive negativ, dens retning maa blive den modsatte af retningen under ligevægten. Men dette er en umulighed. Den mindste værdi de paa molekylerne virkende kræfter kan antage under bevægelsen, er nul. De kan ikke blive negative.

I almindelighed antager man vel, at forøgelsen af hastighedshøiden i forsnevringen er en virkning af det formindskede tryk i tversnittet. Naar blot trykformindskelsen er tilstrækkelig stor, er det — mener man vel — intet tilhinder for, at ogsaa hastighedshøiden kan overstige den givne trykhøide ved mundingen, eller at den levende kraft af fluidet i forsnevringen f_z kan være større end fluidets levende kraft i mundingen. Man antager vel, at paa grund af trykformindskelsen i forsnevringen f_z de givne kræfter og disses arbeide, der er lig den meddelte levende kraft, er større i forsnevringen end ved mundingen. Men ved denne betragtningsmaade gjør man aarsag til virkning og virkning til aarsag. Man vender op ned paa aarsagsforholdet. De tryk, som finder sted i fluidet under bevægelsen, er en virkning af bevægelsen, derimod ikke bevægelsen en virkning af trykkene. Bevægelsen fremkaldes af de givne kræfter og disses arbeide og de stedfindende tryk fremkaldes af bevægelsen. Man vil saaledes umulig kunne faa nogen forøgelse af de givne kræfters arbeide ved hjælp af de tryk, som opvækkes i fluidet paa grund af bevægelsen. Hvis man derfor i forsnevringen kunde erholde en større hastighedshøide end den givne trykhøide ved mundingen, maatte satsen om tilvexten i levende kraft være urigtig, man maatte kunne erholde en tilvext i levende kraft, som var større end de givne kræfters arbeide.

Ved de af mig udviklede formler for trykhøidetabet ved forsnevringer vil aldrig hastigheden i forsnevringen kunne overstige den, der bestemmes af den givne trykhøide ved mundingen. Vi skal betragte forholdet ved en enkelt, ikke pludselig forsnevring. Ved denne er trykhøidetabet:

$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{mF}{F_1}\right)^2\left(1-\left(\frac{F_1}{T_1}\right)^2\right).$$

Følgelig blir trykhøiden for udløbshastigheden v:

$$\frac{v^2}{2g}=\frac{H}{1+\left(\frac{mF}{F_1}\right)^2\left(1-\left(\frac{F_1}{T_1}\right)^2\right)}$$

$$v=\sqrt{\frac{2gH}{1+\left(\frac{mF}{F_1}\right)^2\left(1-\left(\frac{F_1}{T_1}\right)^2\right)}}$$

Nu er:

$$mFv = F_1 v_1$$

$$v_1=\frac{mF}{F_1}\cdot v$$

Følgelig blir hastigheden i forsnevringen:

$$v_1 = \frac{m\,F}{F_1} \sqrt{\frac{2\,g\,H}{1 + \left(\frac{m\,F}{F_1}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{F_1}{T_1}\right)^2\right)}}$$

og hastighedshøiden:

$$\frac{v_1^2}{2\,g} = \left(\frac{m\,F}{F_1}\right)^2 \frac{H}{1 + \left(\frac{m\,F}{T_1}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{F_1}{T_1}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{H}{\left(\frac{F_1}{m\,F}\right)^2 + 1 - \left(\frac{F_1}{T_1}\right)^2}$$

Nu maa $\left(\frac{F_1}{m\,F}\right)^2$ være større end $\left(\frac{F_1}{T_1}\right)^2$, idet nemlig F og følgelig ogsaa m F altid maa være mindre end T_1, naar der forekommer forsnevring. Man sér saaledes, at hastighedshøiden $\frac{v_1^2}{2\,g}$ i forsnevringen er mindre end den givne trykhøide ved mundingen H.

Men naar ved en enkelt forsnevring hastighedshøiden i forsnevringen ikke vil overstige den givne trykhøide ved mundingen, vil den heller ikke kunne det, naar der er flere forsnevringer, idet nemlig trykhøidetabet da blir større og hastigheden i mundingen mindre, og følgelig ogsaa hastigheden i forsnevringen aftager.

Ved pludselige tversnitsforandringer er ved en enkelt forsnevring trykhøiden for mundingshastigheden v:

$$\frac{v^2}{2\,g} = \frac{H}{1 + 2\,m_1 \left(\frac{m\,F}{m_1\,F_1}\right)^2 \left(1 - \frac{F_1}{F_1}\right)}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\,H}{1 + 2\,m_1 \left(\frac{m\,F}{m_1\,F_1}\right)^2 \left(1 - \frac{F_1}{F_1}\right)}}$$

Da nu

$$m\;F\;v = m_1\;F_1\;v_1$$

$$v_1 = \frac{m\,F}{m_1\,F_1}\,v$$

blir hastighedshøiden i forsnevringen:

$$\frac{v_1^2}{2\,g} = \frac{H}{\left(\frac{m_1\,F_1}{m\,F}\right)^2 + 2\,m_1 \left(1 - \frac{F_1}{T_1}\right)}$$

Ved nærmere undersøgelse af dette udtryk vil man finde, at nævneren altid er større end 1. Naar $F_1 = T_1$, blir ogsaa $m_1 = m = 1$ og $\left(\frac{m_1 F_1}{m F}\right)^2 = 1$, medens $2m_1\left(1 - \frac{F_1}{T_1}\right) = 0$. Hastighedshøiden $\frac{v_1^2}{2g}$ blir isaafald lig H. Er derimod $\frac{F_1}{T_1}$ meget liden, hvad i almindelighed er tilfældet, blir

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{H.}{\left(\frac{m_1 F_1}{m F}\right)^2 + 2m_1},$$

hvor nævnerudtrykket altid er større end 1, idet m_1 altid er større end $^1/_2$.

Ved mine formler for trykhøidetabet ved forsnevringer fremkommer saaledes ikke den urimelighed, som den nuværende lære medfører, at hastighedshøiden i forsnevringen kan overstige den givne trykhøide ved mundingen, eller den levende kraft overstige de givne kræfters arbeide.

Ansatssør.

1) Cylindriske ansatsrør.

Vandet antages at træde ind i røret under kontraktion, med kontraktionskoefficienten m', og at fylde det igjen efter kontraktionen. Hastigheden ved ansatsrørets ydre munding v' blir da mindre end hastigheden paa det kontraherede sted af straalen v, idet $v' = m'v$, hvor v er den hastighed af straalen, der svarer til den givne trykhøide. Vandet i den kontraherede del af straalen vil derfor virke accelerende paa vandet efter udvidelsen i ansatsrøret og forøge dettes hastighed. Men derved vil ogsaa udstrømningshastigheden fra reservoiret forøges. Dersom vandet strømmede ind i ansatsrøret med kontraktionskoefficient m = kontraktionskoefficienten ved munding i tynd væg, vilde hastigheden af vandet efter udvidelsen i ansatsrøret være mv og arbeidsevnen lig trykket gange $^1/_2$ mv. I den kontraherede del af straalen er hastigheden v og arbeidsevnen lig trykket gange $^1/_2$ v. Hastigheden i den udvidede del af straalen forøges nu til m'v og arbeidsevnen til trykket gange $^1/_2$ m′v. Nu maa forøgelsen i arbeidsevnen, ved at hastigheden forøges fra mv til m′v, være lig tabet i arbeidsevne, ved at hastigheden v forandres til m′v. Man faar saaledes, da trykket i alle tilfælde er det samme, nemlig det statiske overtryk ved mundingen:

$$v - m'v = m'v - mv,$$

$$m' = \frac{1 + m}{2}.$$

2) Koniske ansatsrør.

Er m′ kontraktionskoefficienten og F tversnittet ved udløbet af reservoiret og f tversnittet ved udløbet af ansatsrøret, saa blir:

$$v - m'\frac{F}{f}v = m'\frac{F}{f}v - m\frac{F}{f}v,$$

hvoraf

$$m' = \frac{1 + m\frac{F}{f}}{2\frac{F}{f}}.$$

Det specifike tryk paa det kontraherede sted er:

$$p' = p_1 - (2m' - 1)\,Hg\varrho,$$

hvor p_1 er det ydre modtryk og $Hg\varrho$ er det hydrostatiske overtryk ved mundingen. Den mindste værdi, p′ kan have, er nul. Blir p′ negativ, ophører ansatsrøret at gaa fyldt. Den værdi af $Hg\varrho$, hvorved dette indtræder, findes af ligningen:

$$p_1 - (2m' - 1)\,Hg\varrho = 0,$$

hvoraf

$$Hg\varrho = \frac{p_1}{2m' - 1}.$$

Indsættes værdien af m′ ved cylindriske ansatsrør:

$$m' = \frac{1 + m}{2}, \text{ faaes:}$$

$$Hg\varrho = \frac{p_1}{m}.$$

Luftformige legemers bevægelse.

Ved den nuværende lære om luftformige legemers bevægelse er der foruden de samme feil, som hefter ved læren om væskers bevægelse, endnu en af fundamental betydning. Denne grundfeil er, at man antager, at der existerer den samme forbindelse mellem tryk, temperatur og tæthed under bevægelsen som under ligevægten.

Er p trykket i kilogram pr. kvadratmeter, v volumet af et kilogram af gasen, T den absolute temperatur, ϱ gasens tæthed og R en konstant, særegen for hver gas, saa er forbindelsesligningen for permanente gaser under ligevægten:

$$pv = RT = \frac{p}{g\varrho}.$$

I modsætning til den nuværende lære antager jeg, at det tryk, som under bevægelsen svarer til en vis tæthed og temperatur, er mindre end det tilsvarende tryk i ligevægtstilstanden. Under bevægelsen formindskes trykket i ligevægtstilstanden med en størrelse lig trykket af den kraft, ved hvis tilføielse bevægelsen fremkaldes, eller med den totale krafts tryk under den forudsætning, at forbindelseskræfterne ikke forandres under bevægelsen. Kaldes dette tryk D, saa blir følgelig den almindelige tilstandsligning for gasarter:

$$(p + D)\,v = RT.$$

Den nuværende tilstandsligning for permanente gaser er en forbindelse af Mariotte's og Gay-Lussac's love, der er udledede ved forsøg med gaser i ligevægtstilstanden. Den gjælder derfor ogsaa kun for ligevægtstilstanden. Men af tilstandsligningen under ligevægten udledes let tilstandsligningen ved en hvilkensomhelst bevægelse, idet man antager, at bevægelsen er fremkommet af en ligevægtstilstand, uden at værdien af de paa fluidets molekyler virkende givne kræfter under ligevægten er blevet forandrede under bevægelsen. Antager man, at bevægelsestilstanden er fremkommet paa denne maade, saa vil gasartens specifike vægt og ligeledes temperaturen være den samme som under den ligevægtstilstand, hvoraf bevægelsen fremkom. Det eneste, som er blevet forandret, er trykket Dettes værdi under den oprindelige ligevægtstilstand er blevet formindsket med den kraft, der fremkalder bevægelsen, altsaa med det hydrostatiske overtryk. Kaldes dette for D, faaes følgelig tilstandsligningen under bevægelsen ved i tilstandsligningen under ligevægten at sætte $p + D$ istedetfor p.

Da D er den kraft, der fremkalder bevægelsen, saa har man ifølge ligningen for tilvexten af levende kraft, naar u betegner hastigheden og f tversnittet:

$$D\,f\,ds = {}^1/_2\,\varrho\,f\,ds\,u^2,$$

hvoraf

$$u^2 = \frac{2D}{\varrho}.$$

Indsættes dette, kan ogsaa tilstandsligningen skrives:

$$\left(p + \frac{u^2\varrho}{2}\right) v = R\,T$$

Er u og D lig 0, faar man tilstandsligningen under ligevægten: $p\,v = R\,T$. Er temperaturen konstant under bevægelsen, saa er:

$$(p + D)\,v = \text{konstant}.$$

Vi skal dernæst finde tilstandsligningen under den forudsætning, at der under bevægelsen tilføres gasen en varmemængde, som er proportional med forandringen af temperaturen.

Kaldes den tilførte varmemængde Q_v og den absolute temperatur ved bevægelsens begyndelse T_0 og temperaturen under bevægelsen T, saa blir følgelig den tilførte varmemængde proportional med $T_0 - T$. Betegner h en konstant størrelse, faaes:

$$Q_v = h\,(T_0 - T),$$

og den i tidselementet tilførte varmemængde, idet Q_v forandres til $Q_v + d\,Q_v$ og T til $T + d\,T$, blir:

$$d\,Q_v = -\,h\,d\,T.$$

Ved $d\,U$ forstaaes den forandring, gasens totalvarme undergaar. A er varmens mekaniske æqvivalent $= \frac{1}{424}$; c_v varmakapaciteten ved konstant volum og c_p varmekapaciteten ved konstant tryk; $\frac{c_p}{c_v} = k$. Ifølge den mekaniske varmelære har man da:

$$dQ_v = d\,U + A\,p\,d\,v.$$

$$d\,U = c_v\,d\,T.$$

$$c_p - c_v = A\,R.$$

Differentieres den almindelige tilstandsligning $(p + D)\,v = R\,T$, faaes:

$$(p + D)\,d\,v + v\,d\,p = R\,d\,T,$$

Da $d\,Q_v = -\,h\,d\,T$, blir:

$$d\,Q_v = A\,p\,d\,v + c_v\,d\,T = -\,h\,d\,T$$

$$d\,T = -\,\frac{A}{h + c_v}\,p\,d\,v.$$

$$(p + D)\,d\,v + v\,d\,p = -\,\frac{A\,R}{h + c_v}\,p\,d\,v = -\,r\,p\,d\,v,$$

idet $\frac{A\,R}{h + c_v}$ sættes lig r. Man faar da videre:

$$v\,dp = -(D + p(1 + r))\,dv$$

$$-\frac{dv}{v} = \frac{dp}{(1 + r)\,p + D}$$

$$\frac{1}{1 + r} \log nat\left(p + \frac{D}{1 + r}\right) = -\log nat\, v + C.$$

$$\log nat\left(p + \frac{D}{1 + r}\right) + (1 + r) \log nat\, v = C'.$$

$$\log nat\left(\left(p + \frac{D}{1 + r}\right) v^{(1 + r)}\right) = C'.$$

$$\left(p + \frac{D}{1 + r}\right) v^{1 + r} = C''$$

Konstanten C'' elimineres, naar man i den almindelige tilstandsligning $(p + D)\,v = R\,T$ sætter $p = p_1$ lig det ydre modtryk. Da D er overtrykket, følgelig $D = p_0 - p_1$, hvor p_0 er det indre tryk under ligevægten, saa blir:

$$(p_1 + D)\,v = (p_1 + p_0 - p_1)\,v = p_0\,v = R\,T.$$

Det specifike volum v og tætheden ϱ har følgelig samme værdi som under ligevægten, naar $p = p_1$. Betegnes volumet i dette tilfælde med v_0 og tætheden med ϱ_0, saa faar man:

$$\left(p + \frac{D}{1 + r}\right) v^{1 + r} = \left(p_1 + \frac{D}{1 + r}\right) v^{1 + r}.$$

Sættes nu $1 + r = n$, blir tilstandsligningen for bevægelsen under den forudsætning, at der tilføres en varmemængde, som er lig temperaturforandringen, multipliceret med en konstant:

$$= \left(p + \frac{D}{n}\right) v^n = \left(p_1 + \frac{D}{n}\right) v_0^{\,n}.$$

Af tilstandsligningen under bevægelsen erholdes tilstandsligningen under ligevægten ved at sætte $D = 0$. Da $D = p_0 - p_1$, blir følgelig $p_0 - p_1 = 0$, og $p_1 = p_0$. For at erholde tilstandsligningen under ligevægten maa man altsaa i tilstandsligningen for bevægelsen sætte $D = 0$ og $p_1 = p_0$. Tilstandsligningen for ligevægten under den forudsætning, at der tilføres en varmemængde, som er lig temperaturforandringen, multipliceret med en konstant, blir følgelig:

$$p\,v^n = p_0\,v_0^{\,n}.$$

Størrelsen af koefficienten n vil afhænge af størrelsen af koefficienten h. Man har nemlig:

$$n = 1 + r = 1 + \frac{A\,R}{h + c_v} = \frac{h + c_v + A\,R}{h + c_v}.$$

Da nu

$$c_v + A\,R = c_p,$$

blir

$$n = \frac{h + c_p}{h + c_v}.$$

Er $h = 0$, tilføres ingen varmemængde under expansionen. Man faar i dette tilfælde:

$$n = \frac{c_p}{c_v} = k.$$

Er temperaturen konstant, altsaa $T_0 - T = 0$, saa blir

$$h = \frac{Q_v}{T_0 - T} = \infty,$$

$$n = \frac{h + c_p}{h + c_v} = 1.$$

Vi vil i det følgende antage, at den udstrømmende gas ingen varmetilførsel erholder. Isaafald er $h = 0$, og $n = k$, og tilstandsligningen for den udstrømmende gas er:

$$\left(p + \frac{D}{k}\right) v^k = \left(p_1 + \frac{D}{k}\right) v_0^k.$$

Indsættes $v = \frac{1}{g\varrho}$ og $v_0 = \frac{1}{g\varrho_0}$, faaes:

$$\varrho = \left(\frac{p + \frac{D}{k}}{p_1 + \frac{D}{k}}\right)^{\frac{1}{k}} \varrho_0,$$

hvoraf ϱ findes, naar det specifike tryk p under bevægelsen er bekjendt.

Det specifike tryk faar man, som forhen paavist, naar man fra trykket under ligevægten subtraherer den totale krafts tryk. Er hastigheden u, tætheden ϱ og kontraktionskoefficienten m, saa er den totale krafts tryk lig $m\varrho u^2$. Det specifike tryk under bevægelsen blir følgelig:

$$p = p_0 - m\varrho u^2 = p_0 - m\varrho \frac{2D}{\varrho}$$

$$p = p_0 - 2mD = p_0 - 2m(p_0 - p_1).$$

Indsættes denne værdi af p i ligningen for ϱ, faaes:

$$\varrho = \varrho_0 \left(\frac{p_0 - 2mD + \frac{D}{k}}{p_1 + \frac{D}{k}}\right)^{\frac{1}{k}} = \varrho_0 \left(\frac{kp_0 - (2mk - 1)D}{kp_1 + D}\right)^{\frac{1}{k}}$$

Denne formel gir tætheden under bevægelsen, naar varme hverken berøves eller tilføres. Vil man have tætheden under den forudsætning, at temperaturen er konstant, findes denne ved i ovenstaaende formel at sætte $k = 1$. Isaafald blir:

$$\varrho = \varrho_0 \frac{p_0 - (2m - 1)D}{p_1 + D}$$

For hastigheden u er forhen fundet formlen:

$$u^2 = \frac{2D}{\varrho}$$

Indsættes værdien af ϱ, faaes:

$$u = \sqrt{\frac{2D}{\varrho_0}\left(\frac{k p_1 + D}{k p_0 - (2mk - 1)D}\right)^{\frac{1}{k}}}$$

Er udløbstversnittet f, saa blir vægten af det fluidum, der strømmer ud pr. sekund, $Q = m f g \varrho u$.

$$Q = m f g \sqrt{2D\varrho_0\left(\frac{k p_0 - (2mk - 1)D}{k p_1 + D}\right)^{\frac{1}{k}}}$$

Denne formel gir udløbsmængden pr. sekund under den forudsætning, at tilstanden af gasen i reservoiret ikke forandres.

Vil man have Q og u under den forudsætning, at temperaturen af den udstrømmende gas er konstant, sættes i ovenstaaende formler $k = 1$.

Temperaturen af den udstrømmende gas finder man af den almindelige tilstandsligning:

$$(p + D)v = RT$$

i forbindelse med

$$\left(p + \frac{D}{k}\right)v^k = \left(p_1 + \frac{D}{k}\right)v_0^k$$

og formlen for det specifike tryk

$$p = p_0 - 2mD.$$

Man finder:

$$T = \frac{1}{R}(p + D)v = \frac{1}{R}(p_0 - (2m - 1)D)v_0\left(\frac{p_1 + \frac{D}{k}}{p_0 - 2mD + \frac{D}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

Er $p_1 = 0$, saa er $m = {}^1/_2$, og $T = \frac{1}{R}p_0 v_0$. Ved udstrømning i lufttomt rum vil følgelig temperaturen af den udstrømmende gas blive uforandret.

Kontraktionskoefficienten bestemmes ligesom ved væsker af karrets form, saalænge det specifike tryk p er større end nul. Blir p negativ, bestemmes den af formlen:

$$p = p_0 - 2mD = 0,$$

hvoraf:

$$m = \frac{p_0}{2D} = \frac{p_0}{2(p_0 - p_1)}$$

Er $p_1 = 0$, foregaar altsaa udstrømningen i lufttomt rum, saa er $m = {}^1/_2$.

Tilstrømningshastigheden til mundingen findes som ved væsker. Man faar den samme formel for tiden til indtrædelse af permanens:

$$t = \frac{1}{f}\int_0^l \frac{f_s\, ds}{\sqrt{2g(h-z) + \frac{2(p'_0 - p_1)}{l\varrho}(l-s)}},$$

hvor p'_0 er trykket ved tilstrømningen til reservoiret. Her kan i almindelighed $2g\ (h-z)$ sættes ud af betragtning. Er nu $f_s = f_0 - as$, altsaa $a = \frac{f_0 - f}{l}$, faaes tiden til indtrædelsen af permanens:

$$t = \frac{2}{3}\left(\frac{f_0 + 2f}{f}\right)\frac{l}{\sqrt{\frac{2(p'_0 - p_1)}{\varrho}}}$$

Arbeidsevnen af den udstrømmende gas er, som forhen omtalt, bestemt foruden ved accelerationsarbeidet af de tilføiede kræfter, hvorved bevægelsen fremkaldes, nemlig det hydrostatiske overtryk, ogsaa ved det arbeide, som udføres, idet $P_1, P_2 \ldots P_n$ i den oprindelige ligevægtstilstand forandres til $P_1 - z_1, P_2 - z_2 \ldots P_n - z_n$ i den ny ligevægtstilstand, naar den fremkaldte bevægelse er ophørt. Dette sidste arbeide er et expansionsarbeide. Arbeidsevnen blir saaledes en sum af accelerationsarbeidet af det hydrostatiske overtryk, idet kræfterne $P_1, P_2 \ldots P_n$ betragtes som konstante, og expansionsarbeidet ved at kræfterne $P_1, P_2 \ldots P_n$ forandres til $P_1 - z_1, P_2 - z_2, \ldots P_n - z_n$. Arbeidsevnen paa grund af accelerationsarbeidet bestemmes af satsen om tilvexten i arbeidsevne Ved expansionen forandres den oprindelige tæthed ϱ_0 til ϱ_1 og det specifiske volum v_0 til v_1, medens trykket, der er lig det ydre modtryk p_1, forbliver uforandret. Tilstandsligningen under bevægelsen er:

$$(p_1 + D)\ v = R\ T.$$

Expansionen foregaar saaledes at D forandres fra den oprindelige værdi $(p_0 - p_1)$ til 0, medens v forandres fra v_0 til v_1. Forbindelsesligningen, hvoraf v_1 bestemmes, blir derfor, naar varme hverken tilføres eller berøves:

$$p_1\ v_1^{\,k} = p_0\ v_0^{\,k}$$

hvoraf

$$v_1 = v_0 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Hvis derimod temperaturen holdes konstant under expansionen, blir:

$$v_1 = v_0\ \frac{p_0}{p_1}$$

Expansionsarbeidet E pr. kilogram gas blir følgelig, naar varme ikke tilføres eller berøves:

$$E = p_1 (v_1 - v_0) = p_1 \left(v_0 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} - v_0\right)$$

$$= p_1 v_0 \left\{ \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} - 1 \right\}$$

og naar temperaturen holdes konstant:

$$E = p_1 (v_1 - v_0) = p_1 v_0 \left(\frac{p_0}{p_1} - 1\right) = (p_0 - p_1) v_0.$$

Accelerationsarbeidet pr. kilogram gas A, som er lig overtrykket fD multipliceret med den halve hastighed u og divideret med vægten af det i et sekund udstrømmende fluidum, blir, da $u^2 = \frac{2D}{\varrho_0}$:

$$A = \frac{\frac{1}{2} fD \sqrt{\frac{2D}{\varrho_0}}}{m f g \sqrt{\varrho_0 2D \left(\frac{k p_0 - (2mk - 1) D}{k p_1 + D}\right)^{\frac{1}{k}}}} =$$

$$= \frac{D}{2 m g \varrho_0 \sqrt{\left(\frac{k p_0 - (2mk - 1) D}{k p_1 + D}\right)^{\frac{1}{k}}}} =$$

$$= \frac{(p_0 - p_1) v_0}{2m \left(\frac{k p_0 - (2mk - 1) D}{k p_1 + D}\right)^{\frac{1}{2k}}}$$

Den samlede arbeidsevne er summen af A og E.

Ved beregningen af accelerationsarbeidet antages gasens oprindelige tæthed og temperatur uforandret. Ved udstrømningen fra et reservoir vil imidlertid, som forhen vist, tætheden være mindre end den oprindelige tæthed ϱ_0. Men samtidig vil ogsaa trykket p være mindre end det ydre ydre modtryk p_1. Da nu gasen ikke kan begynde at expandere, før dens specifiske tryk p er saa stort som det ydre tryk p_1, maa den følgelig efter udløbet først lide en sammentrykning, idet hastigheden forandres fra $\sqrt{\frac{2D}{\varrho}}$ til $\sqrt{\frac{2D}{\varrho_0}}$, tætheden fra ϱ til ϱ_0, trykket fra p til p_1, medens samtidig temperaturen antager sin oprindelige værdi. Accelerationsarbeidet ved udløbet, som paa grund af mindre tæthed og deraf følgende større hastighed af gasen er større end den foran angivne værdi af A, formindskes derfor ved sammentrykningen, saaledes at arbeidsevnen kun blir lig A.

Udstrømning af luftformige legemer under foranderligt tryk.

Vi betragter her det tilfælde, at reservoiret ingen tilstrømning erholder under udløbet. Trykket blir da variabelt. Her betegner:

t udløbstiden i sekunder.
Q vægten i kilogram af det i t sekunder udstrømmende fluidum.
p_0 trykket i reservoiret ved bevægelsens begyndelse.
p det under bevægelsen foranderlige tryk i reservoiret.
p_1 det ydre modtryk i mundingen.
p' det variable specifiske tryk af den udstrømmende gas.
ϱ_0 tætheden af gasen i reservoiret ved bevægelsens begyndelse.
ϱ'_0 den variable tæthed af gasen i reservoiret under bevægelsen ved trykket p.
ϱ den variable tæthed af den udstrømmende gas.
V volumet i kubikmeter af reservoiret, hvorfra udstrømningen foregaar.
f mundingens tværsnit.
u udløbshastigheden ved trykket p i reservoiret.

Vægten af det i tidselementet dt udstrømmende fluidum blir da:

$$d\,Q = m\,f\,\varrho\,g\,u\,dt.$$

Her er u udløbshastigheden ved det indre tryk p og tætheden ϱ af den udstrømmende gas, følgelig:

$$u = \sqrt{\frac{2\,(p - p_1)}{\varrho}}$$

Indsættes dette, faaes:

$$d\,Q = m\,f\,g\,\varrho\,dt\,\sqrt{\frac{2\,(p - p_1)}{\varrho}}$$

$$= m\,f\,g\,dt\,\sqrt{2\,(p - p_1)\,\varrho}$$

Vi antager nu, at expansionen af gasen i reservoiret, idet dens tryk er forandret fra p_0 til p og tætheden fra ϱ_0 til ϱ'_0, foregaar saaledes, at den tilførte varmemængde er proportional med temperaturforandringen. Forbindelsesligningen mellem tryk og tæthed er isaafald:

$$p_0\left(\frac{1}{g\,\varrho_0}\right)^n = p\left(\frac{1}{g\,\varrho'_0}\right)^n = \text{konstant},$$

hvoraf følger:

$$p = p_0\left(\frac{\varrho'_0}{\varrho_0}\right)^n$$

Nu er vægten af den i reservoiret indeholdte gas ved bevægelsens begyndelse, naar tætheden er ϱ_0, lig $V\,g\,\varrho_0$, og senere, naar tætheden er ϱ'_0, $V\,g\,\varrho'_0$. Vægten af den udstrømmende gas er differentsen mellem disse vægter.

$$Q = V\,g\,\varrho_0 - V\,g\,\varrho'_0.$$

Naar trykket i reservoiret er p, saa er overtrykket ved mundingen $p - p_1$. Betegnes dette overtryk med D, saa er tilstandsligningen for den udstrømmende gas, naar varme hverken tilføres eller berøves:

$$\left(p' + \frac{D}{k}\right)\left(\frac{1}{g\varrho}\right)^k = \left(p_1 + \frac{D}{k}\right)\left(\frac{1}{g\varrho'_0}\right)^k$$

naar trykket i reservoiret er p og tætheden ϱ'_0.

Nu er det specifiske tryk af den udstrømmende gas, naar trykket i reservoiret er p, udløbshastigheden u og tætheden af den udstrømmende gas ϱ:

$$p' = p - m\, u^2 \varrho = 2m\, D.$$

Indsættes værdien af p' i tilstandsligningen for den udstrømmende gas, blir denne:

$$\left(p - 2m\, D + \frac{D}{k}\right)\left(\frac{1}{g\varrho}\right)^k = \left(p_1 + \frac{D}{k}\right)\left(\frac{1}{g\varrho'_0}\right)^k$$

Af denne ligning findes tætheden af den udstrømmende gas ϱ, naar trykket i reservoiret er p og tætheden ϱ'_0. Man faar:

$$\varrho = \varrho'_0 \left(\frac{p - 2m\, D + \frac{D}{k}}{p_1 + \frac{D}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

Da nu:

$$Q = Vg\,\varrho_0 - Vg\,\varrho'_0,$$

blir:

$$\varrho'_0 = \frac{Vg\,\varrho_0 - Q}{Vg} = \varrho_0 - \frac{Q}{Vg} = \varrho_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\,\varrho_0}\right)$$

Indsættes værdien af ϱ'_0 i ligningen for p, faaes:

$$p = p_0 \left(\frac{\varrho_0 - \frac{Q}{Vg}}{\varrho_0}\right)^n = p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\,\varrho_0}\right)^n$$

Indsættes værdien af p og ϱ'_0 i udtrykket for ϱ, faaes:

$$\varrho = \left(\varrho_0 - \frac{Q}{Vg}\right)\left(\frac{p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\,\varrho_0}\right)^n - 2m\, D + \frac{D}{k}}{p_1 + \frac{D}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

Her er $D = p - p_1 = p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\,\varrho_0}\right)^n - p_1$, altsaa:

$$-2m\, D + \frac{D}{k} = -\left(2m - \frac{1}{k}\right) D = -\left(2m - \frac{1}{k}\right)\left(p - p_1\right) =$$

$$= -\left(2m - \frac{1}{k}\right)\left(p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\,\varrho_0}\right)^n - p_1\right)$$

Indsættes dette, faaes:

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right) \left\{ \frac{p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right)^n - \left(2m - \frac{1}{k}\right)\left(p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right)^n - p_1\right)}{p_1 + \frac{p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right)^n - p_1}{k}} \right\}^{\frac{1}{k}}$$

$$= \varrho_0 \left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right) \left\{ \frac{p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right)^n \left(1 + \frac{1}{k} - 2m\right) + p_1\left(2m - \frac{1}{k}\right)}{p_1 + \frac{p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right)^n - p_1}{k}} \right\}^{\frac{1}{k}}$$

Indsættes værdierne af ϱ og p i udtrykket for dQ:

$$dQ = mfg\,dt \sqrt{2(p - p_1)\varrho},$$

finder man differentialet af tiden udtrykt ved Q og dQ. Man faar:

$$dQ = mfg\,dt \left(2\left(p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right)^n - p_1\right)\varrho_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right)^n \left(1 + \frac{1}{k} - 2m\right) + p_1\left(2m - \frac{1}{k}\right)}{p_1 + \frac{p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right)^n - p_1}{k}} \right)^{\frac{1}{2k}}$$

hvoraf:

$$dt = \frac{1}{mfg\sqrt{\varrho_0}}\,dQ \left(p_1 + \frac{p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right)^n - p_1}{k}\right)^{\frac{1}{2k}} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2\left(p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right)^n - p_1\right)\left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right)^n \left(1 + \frac{1}{k} - 2m\right) + p_1\left(2m - \frac{1}{k}\right)} \right)^{\frac{1}{2k}}$$

Er her $Vg\varrho_0$ uendelig stor i forhold til Q, faar man udløb under konstant tryk. Da blir:

$$dt = \frac{dQ \sqrt{\left(p_1 + \frac{p_0 - p_1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}}}{mfg\sqrt{\varrho_0}\sqrt{2(p_0 - p_1)\left(p_0\left(1 + \frac{1}{k} - 2m\right) + p_1\left(2m - \frac{1}{k}\right)\right)^{\frac{1}{k}}}}$$

hvoraf, da $Q = 0$, naar $t = 0$:

6

$$Q = \frac{t\ m f g \sqrt{\varrho_0} \sqrt{2(p_0 - p_1)\left(p_0(1+\frac{1}{k}-2m)+p_1(2m-\frac{1}{k})\right)^{\frac{1}{k}}}}{\left(p_1 + \frac{p_0 - p_1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}}$$

hvilken formel er identisk med den forhen fundne udløbsformel, der gjælder for det tilfælde, at tilstanden af gasen i reservoiret ikke forandres under bevægelsen.

Sættes $\frac{Q}{\sqrt{g \varrho_0}}$, der altid er mindre end 1, lig q, blir

$$dQ = dq \sqrt{g \varrho_0}$$

og

$$dt = \frac{1}{m f g \sqrt{\varrho_0}} \frac{\sqrt{g \varrho_0}\, dq \left(p_1 + \frac{p_0(1-q)^n}{k} - p_1\right)^{\frac{1}{2k}}}{(2(p_0(1-q)^n - p_1)(1-q))^{\frac{1}{2}} \left(p_0(1-q)^n\left(1+\frac{1}{k}-2m\right) + p_1\left(2m-\frac{1}{k}\right)\right)^{\frac{1}{2k}}}$$

Sættes fremdeles

$$\sqrt{g \varrho_0} = Q_0;\quad 2m - \frac{1}{k} = a, \text{ faaes:}$$

$$dt = \frac{Q_0}{m f g \sqrt{\varrho_0}} \frac{dq\left(p_1 + \frac{p_0(1-q)^n - p_1}{k}\right)^{\frac{1}{2k}}}{(2(p_0(1-q)^n - p_1)(1-q))^{\frac{1}{2}} \left(p_0(1-q)^n(1-a) + p_1 a\right)^{\frac{1}{2k}}}$$

For at integrere det irrationale differential, udvikles $(1-q)^n$ i en uendelig række. Man har efter Newtons binominalformel:

$$(1-q)^n = 1 - nq + \frac{n(n-1)}{1.2.} q^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.} q^3 + \ldots$$

Kaldes summen af leddene fra $\frac{n(n-1)}{1.2.} q^2$ af for S, blir

$$(1-q)^n = 1 - nq + S.$$

Indsættes dette, faaes:

$$dt = \frac{Q_0}{m f g \sqrt{\varrho_0}} \frac{dq\left(p_1 + \frac{p_0(1-nq+S) - p_1}{k}\right)^{\frac{1}{2k}}}{\left(2(p_0(1-qn+S) - p_1)(1-q)\right)^{\frac{1}{2}} \left(p_0(1-qn+S)(1-a) + p_1 a\right)^{\frac{1}{2k}}}$$

$$= \frac{Q_0}{mfg\sqrt{\varrho_0}}\left(\frac{dq\left(p_1+\left(\frac{p_0-p_1}{k}\right)-\frac{nq}{k}+\frac{S}{k}\right)^{\frac{1}{2k}}}{\left(2(p_0-p_1)-2p_0qn+2p_0S-2(p_0-p_1)q-\right.}\right.$$

$$\left.\left.-2p_0(qn-S)q\right)^{\frac{1}{2}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\left(p_0(1-a)+p_1a-p_0(1-a)qn+p_0(1-a)S\right)^{\frac{1}{2k}}}\right)$$

$$dt=\left|\frac{Q_0}{mfg\sqrt{\varrho_0}}\frac{dq\left(p_1+\frac{p_0-p_1}{k}\right)^{\frac{1}{2k}}\left(1-\frac{\frac{nq-S}{k}}{p_1+\frac{p_0-p_1}{k}}\right)^{\frac{1}{2k}}}{\left(2(p_0-p_1)\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{(2p_0(1+n)-2p_1)q}{2(p_0-p_1)}+\right.}\right.$$

$$\left.+\frac{2p_0S-2p_0(qn-S)q}{2(p_0-p_1)}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\left(p_0(1-a)+p_1a\right)^{\frac{1}{2k}}\left(1-\frac{p_0(1-a)nq-p_0(1-a)S}{p_0(1-a)+ap_1}\right)^{\frac{1}{2k}}}\right)$$

Nu er:

$$\frac{mfg\sqrt{\varrho_0}\left(2(p_0-p_1)\right)^{\frac{1}{2}}\left(p_0(1-a)+p_1a\right)^{\frac{1}{2k}}}{\left(p_1+\frac{p_0-p_1}{k}\right)^{\frac{1}{2k}}}$$

lig udløbsmængden i ét sekund under konstant tryk. Kaldes denne for Q_1, faaes:

$$dt=\frac{Q_0}{Q_1}\left|\frac{dq\left(1-\frac{\frac{nq-S}{k}}{p_1+\frac{p_0-p_1}{k}}\right)^{\frac{1}{2k}}}{\left(1\div\frac{(2p_0(1+n)-2p_1)q}{2(p_0-p_1)}+\frac{2p_0(S-(qn-S)q)}{2(p_0-p_1)}\right)^{\frac{1}{2}}}\right|\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\left(1-\frac{p_0(1-a)nq}{p_0(1-a)+p_1a}+\frac{p_0(1-a)S}{p_0(1-a)+p_1a}\right)^{\frac{1}{2k}}}\right)$$

Nu er tælleren i differentialet $1-\left(\frac{nq-S}{k\left(p_1+\frac{p_0-p_1}{k}\right)}\right)$ meget lidet forskjellig fra 1. Hvis q er en meget liden brøk, behøver man ved rækkeudviklingen af de irrationale funktioner i nævneren blot at tage de led, som indeholder 1ste potens af q. Man faar da:

$$dt = \frac{Q_0}{Q_1} \frac{dq}{\left(1 \div \frac{(p_0(1+n) - p_1)q}{2(p_0 - p_1)}\right)\left(1 - \frac{1}{2k}\frac{p_0(1-a)nq}{p_0(1-a)+p_1 a}\right)}$$

Sættes:

$$A = \frac{p_0(1+n) - p_1}{2(p_0 - p_1)};$$

$$B = \frac{n}{2k}\frac{p_0(1-a)}{p_0(1-a)+p_1 a}$$

og man ved multiplikationen af nævnerudtrykkets faktorer blot tager de led, der indeholder q i første poten$^{\cdot}$, faaes:

$$dt = \frac{Q_0}{Q_1}\frac{dq}{1-(A+B)q}$$

Følgelig:

$$t = \frac{Q_0}{Q_1}\int\frac{dq}{1-(A+B)q} + K$$

$$= \frac{Q_0}{Q_1}\int\frac{dq}{(A+B)\left(\frac{1}{A+B} - q\right)} + K$$

$$t\frac{Q_1}{Q_0} = -\frac{1}{A+B}\log nat\left\{\frac{1}{A+B} - q\right\} + K$$

Naar t er 0, er q lig 0; følgelig

$$0 = -\frac{1}{A+B}\log\ nat\left(\frac{1}{(A+B)}\right) + K,$$

hvoraf:

$$t\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{1}{A+B}\left(\log nat\frac{1}{A+B}\right) - \log nat\left(\frac{1}{A+B} - q\right)$$

$$= \frac{1}{A+B}\log nat\left\{\frac{\left(\frac{1}{A+B}\right)}{\frac{1}{A+B} - q}\right\}$$

$$t = \frac{Q_0}{Q_1}\frac{1}{A+B}\log nat\left(\frac{1}{1-(A+B)q}\right)$$

Af denne formel findes tiden t, naar q, som er lig $\frac{Q}{Q_0}$ er givet. Omvendt vil man ved at løse ligningen med hensyn paa q finde Q eller udløbsmængden i en given tid t. Man finder af den ovenstaaende ligning for t:

$$e^{t\frac{Q_1}{Q_0}(A+B)} = \frac{1}{1-(A+B)q}$$

eller:

$$e^{-t\frac{Q_1}{Q_0}(A+B)} = 1 - (A+B)\,q$$

hvoraf:

$$q = \frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{A+B}\left\{1 - e^{-t\frac{Q_1}{Q_0}(A+B)}\right\}$$

$$Q = \frac{Q_0}{A+B}\left\{1 - e^{-t\frac{Q_1}{Q_0}(A+B)}\right\}$$

Udvikler man $e^{-t\frac{Q_1}{Q_0}(A+B)}$ i række:

$$e^{-t\frac{Q_1}{Q_0}(A+B)} = 1 - t\frac{Q_1}{Q_0}(A+B) + \frac{t^2}{2}\left\{\frac{Q_1}{Q_0}\right\}^2 (A+B)^2 -$$

$$- \frac{t^3}{2.3}\left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)(A+B)^3 + \ldots .$$

faaes:

$$Q = tQ_1 - \frac{t^2}{2}Q_1\left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)(A+B) + \frac{t^3}{2.3}Q_1\left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^2 (A+B)^2 - \ldots$$

$$Q = tQ_1\left(1 - \frac{t}{2}\frac{Q_1}{Q_0}(A+B + \frac{t^2}{2.3}\left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^2 (A+B)^2 - \ldots .\right)$$

For at denne formel for vægten af den i t sekunder udstrømmende gas, naar reservoiret ingen tilførsel erholder, skal give tilfredsstillende resultater, maa den udstrømmende vægtsmængde Q være liden i sammenligning med reservoirets oprindelige gasindhold $Vg\varrho_0$. Naar Q er funden, erholdes tætheden ϱ'_0, trykket p og temperaturen T af ligningerne:

$$\varrho'_0 = \varrho_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\,\varrho_0}\right);$$

$$p = p_0\left(1 - \frac{Q}{Vg\varrho_0}\right)^n = p_0\left(1 - n\frac{Q}{Vg\varrho_0} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{Q}{Vg\varrho_0}\right)^2 - \ldots\right)$$

og temperaturen af tilstandsligningen ved enden af udløbet:

$$p\left(\frac{1}{g\varrho'_0}\right) = RT$$

hvoraf

$$T = \frac{p_0}{R g \varrho_0} \left(1 - \frac{Q}{\sqrt{g \varrho_0}}\right)^{n-1} = T_0 \left(1 - \frac{Q}{\sqrt{g \varrho_0}}\right)^{n-1} =$$

$$= T_0 \left(1 - (n-1)\left(\frac{Q}{\sqrt{g \varrho_0}}\right) + \frac{(n-1)(1-2)}{2}\left(\frac{Q}{\sqrt{g \varrho_0}}\right)^2 - \ldots\right)$$

naar T_0 er temperaturen i reservoiret ved bevægelsens begyndelse.

Naar den forudsætning, at udløbsmængden er meget liden i sammenligning med reservoirets indhold, ikke fyldestgjøres, kan man dele tiden t i saa mange smaadele, at forudsætningen fyldestgjøres for udstrømningen i hver af disse mindre tidsdele. Man maa da i formlerne tildele trykket og tætheden af gasen i reservoiret den værdi, som de efter beregningen har ved hver af tidsdelenes begyndelse.

Dersom man ved rækkeudviklingen af de irrationale funktioner i nævneren i udtrykket for $\frac{dt}{dq}$ tager med ogsaa 2den potens af q, faar man formler, som gjælder for lidt større værdier af Q og t.

Tælleren kan fremdeles sættes lig 1, da nemlig $\left(\frac{1}{p_1 + \frac{p_0 - p_1}{k}}\right)$ er en meget liden størrelse. Udtrykket for dt er:

$$dt = \frac{Q_0}{Q_1} \frac{dq}{\left(1 - 2Aq + \frac{p_0}{(p_0 - p_1)}(S - (qn - S)q)\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - 2Bq + \frac{2k}{n} B S\right)^{\frac{1}{2k}}}$$

$$\frac{Q_1}{Q_0} dt = \frac{dq}{\left(1 - Aq + \frac{p_0 S}{2(p_0 - p_1)} - \frac{p_0 q^2 n}{2(p_0 - p_1)} - \frac{A^2 q^2}{2}\right)\left(1 - Bq + \frac{BS}{n} + \frac{(1-2k)}{2} B^2 q^2\right)}$$

$$= \frac{dq}{1 - (A+B)q + \left(\frac{p_0}{2(p_0 - p_1)} + \frac{B}{n}\right)S + q^2\left(AB + \left(\frac{1-2k}{2}\right)B^2 - \frac{A^2}{2} - \frac{p_0 n}{2(p_0 - p_1)}\right)}$$

og naar man indsætter første led af S, nemlig $\frac{n(\imath - 1)}{2} q^2$:

$$\frac{Q_1}{Q_0}dt = \frac{dq}{1-(A+Bq+\left(\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{p_0}{2(p_0-p_1)}+\frac{B}{n}\right)+AB+ + \left(\frac{1-2k}{2}\right)B^2-\frac{A^2}{2}-\frac{p_0\,n}{2(p_0-p_1)}\right)q^2}$$

Sættes nu:

$$A+B=\frac{p_0(1+n)}{2(p_0-p_1)}+\frac{n}{2k}\,\frac{p_0(1+a)}{p_0(1+a)+p_1 a}=D$$

$$\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{p_0}{2(p_0-p_1)}+\frac{B}{n}\right)+AB+\left(\frac{1-2k}{2}\right)B^2-\frac{A^2}{2}-\frac{p_0\,n}{2(p_0-p_1)}=F$$

faar man:

$$\frac{Q_1}{Q_0}dt=\frac{dq}{1-Dq+Fq^2}=\frac{\frac{dq}{F}}{q^2-\frac{D}{F}q+\frac{1}{F}}$$

For at integrere differentialet $\frac{\frac{dq}{F}}{q^2-\frac{D}{F}q+\frac{1}{F}}$ opløses nævneren i sine faktorer. Man har:

$$q^2-\frac{D}{F}q+\frac{1}{F}=\left(q-\frac{D}{2F}+\frac{\sqrt{D^2-4F}}{2F}\right)\left(q-\frac{D}{2F}-\frac{\sqrt{D^2-4F}}{2F}\right)$$

Man sætter nu:

$$\frac{1}{q^2-\frac{D}{F}q+\frac{1}{F}}=\frac{G}{q-\frac{D}{2F}+\frac{\sqrt{D^2-4F}}{2F}}+\frac{H}{q-\frac{D}{2F}-\frac{\sqrt{D^2-4F}}{2F}}.$$

Til bestemmelse af G og H har man den betingelse, at

$$G\left(q-\frac{D}{2F}-\frac{\sqrt{D^2-4F}}{2F}\right)+H\left(q-\frac{D}{2F}+\frac{\sqrt{D^2-4F}}{2F}\right)=1.$$

$$(G+H)q-G\left(\frac{D}{2F}+\frac{\sqrt{D^2-4F}}{2F}\right)+H\left(\frac{\sqrt{D^2-4F}}{2F}\right)-\frac{D}{2F}\Big\}=1.$$

Heraf følger:

$$G+H=0,$$
$$G=-H$$

$$-G\left\{\frac{D}{2F}+\frac{\sqrt{D^2-4F}}{2F}\right\}-G\left\{\frac{\sqrt{D^2-4F}}{2F}-\frac{D}{2F}\right\}=1$$

$$G = -\frac{2F}{2\sqrt{D^2 - 4F}} = \div \frac{F}{\sqrt{D^2 - 4F}}$$

$$H = -G = \frac{F}{\sqrt{D^2 - 4F}}$$

Følgelig blir:

$$\frac{Q_1}{Q_0}dt = \frac{dq}{\sqrt{D^2 - 4F}\left\{q - \frac{D}{2F} - \frac{\sqrt{D^2 - 4F}}{2F}\right\}} -$$

$$- \frac{dq}{\sqrt{D^2 - 4F}\left\{q - \frac{D}{2F} + \frac{\sqrt{D^2 - 4F}}{2F}\right\}}$$

$$t\frac{Q_1}{Q_0}\sqrt{D^2 - 4F} = \log\text{ nat}\left\{\frac{q - \frac{D}{2F} - \frac{\sqrt{D^2-4F}}{2F}}{q - \frac{D}{2F} + \frac{\sqrt{D^2-4F}}{2F}}\right\} + K$$

Da $t = 0$, naar $q = 0$, blir:

$$0 = \log\text{ nat}\left\{\frac{-\frac{D}{2F} - \frac{\sqrt{D^2-4F}}{2F}}{-\frac{D}{2F} + \frac{\sqrt{D^2-4F}}{2F}}\right\} + K$$

og

$$t\frac{Q_1}{Q_0}\sqrt{D^2 - 4F} =$$

$$= \log\text{ nat}\left\{\frac{\left\{q - \frac{D + \sqrt{D^2-4F}}{2F}\right\}\left\{-D + \sqrt{D^2 - 4F}\right\}}{\left\{q - \frac{D - \sqrt{D^2-4F}}{2F}\right\}\left\{-D - \sqrt{D^2-4F}\right\}}\right\}$$

$$t\frac{Q_1}{Q_0}\sqrt{D^2 - 4F} = \log\text{ nat}\left\{\frac{1 + q\frac{(\sqrt{D^2-4F} \div D)}{2}}{1 - q\frac{(D + \sqrt{D^2-4F})}{2}}\right\}$$

Af denne ligning findes t for givne værdier af q eller $\frac{Q}{Q_0}$ Opløses den med hensyn paa q, findes Q ved givne værdier af t. Man faar:

$$t\,e\,\frac{Q_1}{Q_0}\sqrt{D^2-4F} = \frac{1+q\left(\frac{\sqrt{D^2-4F}-D}{2}\right)}{1-q\,\frac{(D+\sqrt{D^2-4F})}{2}}$$

$$e\,\frac{Q_1}{Q_0}\sqrt{D^2-4F}\,t - \frac{q\,(D+\sqrt{D^2-4F})}{2}\,e\,\frac{Q_1}{Q_0}\sqrt{D^2-4F}\,t =$$

$$= 1 + q\left(\frac{\sqrt{D^2-4F}-D}{2}\right)$$

$$q\left(\frac{\sqrt{D^2-4F}-D}{2}\right) + q\left(\frac{\sqrt{D^2-4F}+D}{2}\right)e\,\frac{Q_1}{Q_0}\sqrt{D^2-4F}\,t =$$

$$= e\,\frac{Q_1}{Q_0}\sqrt{D^2-4F}\,t - 1$$

$$q = \frac{Q}{Q_0} = \frac{e\,\frac{Q_1}{Q_0}\sqrt{D^2-4F}\,t - 1}{e\,\frac{Q_1}{Q_0}\sqrt{D^2-4F}\,t\left(\frac{\sqrt{D^2-4F}+D}{2}\right) + \frac{\sqrt{D^2-4F}-D}{2}}$$

Ved rækkeudvikling af tælleren faaes:

$$1 + \frac{Q_1}{Q_0}\sqrt{D^2-4F}\,t + \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^2\left(\frac{\sqrt{D^2-4F}}{2}\right)^2 t^2 + \ldots - 1 =$$

$$= \frac{Q_1}{Q_0}\sqrt{D^2-4F}\,t + \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^2\left(\frac{\sqrt{D^2-4F}}{2}\right)^2 t^2 + \ldots$$

Udvikles nævneren i række, blir den:

$$\left\{\frac{\sqrt{D^2-4F}+D}{2}\right\}\left\{1 + \frac{Q_1}{Q_0}\sqrt{D^2-3F}\,t + \left\{\frac{Q_1}{Q_0}\right\}^2\left\{\frac{\sqrt{D^2-4F}}{2}\right\}^2 t^2 + \ldots\right\}$$

$$+ \frac{\sqrt{D^2-4F}-D}{2} =$$

$$= \sqrt{D^2-4F} + \frac{Q_1}{Q_0}\sqrt{D^2-4F}\left(\sqrt{D^2-4F}+D\right)t + \ldots$$

$$+ \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^2\left(\sqrt{D^2-4F}\right)^2\left(\frac{\sqrt{D^2-4F}+D}{2}\right)\frac{t^2}{2} + \ldots$$

Divideres tællerrækken med nævnerrækken, faaes:

$$q = \frac{Q}{Q_0} = \frac{Q_1 t}{Q_0} - \left(\frac{Q_1 t}{Q_0}\right)^2 \frac{D}{2} + \left(\frac{Q_1 t}{Q_0}\right)^3 \left(\frac{D^2 + 2F}{2.3}\right) - \left(\frac{Q_1 t}{Q_0}\right)^4 \left(\frac{D^3 + 8FD}{2.3.4}\right) + \ldots$$

hvoraf:

$$Q = Q_1 t \left(1 - \frac{Q_1 t}{Q_0} \frac{D}{2} + \left(\frac{Q_1 t}{Q_0}\right)^2 \left(\frac{D^2 + 2F}{2.3}\right) - \left(\frac{Q_1 t}{Q_0}\right)^3 \left(\frac{D^3 + 8FD}{2.3.4}\right) + \ldots\right.$$

Denne formel for Q adskiller sig først i 3die led af rækken fra den forhen fundne, idet nemlig $D = A + B$.

Antager man, at gasen i reservoiret under udstrømningen ikke tilføres nogen varme, findes udløbsmængden Q ved i ovenstaaende formler at sætte $n = k$ i udtrykkene for A, B, D og F.

Antages derimod, at gasen i reservoiret tilføres saa megen varme, at dens temperatur blir uforandret, medens udstrømningen af gasen foregaar uden varmetilførsel, blir

$$p = p_0 \left(1 - \frac{Q}{V g \varrho_0}\right)$$

Man maa da istedetfor $\left(1 - \frac{Q}{V g \varrho_0}\right)^n = (1 - q)^n$ sætte $(1-q)$ i udtrykket for dt. Man faar saaledes udløbsmængden Q ved i udtrykkene for A, B, D og F at sætte $n = 1$.

I praksis kan det antages, at udstrømningen foregaar paa den maade, at den gas, som strømmer ud, ingen varmetilførsel erholder under selve udløbet, derimod erholder gasen i reservoiret tilførsel af varme udenfra, dog ikke saa meget, at dens temperatur holdes konstant. Den oprindelige temperatur i reservoiret, der er den samme som den omgivende lufts temperatur, synker nemlig under udstrømningen fra reservoiret og blir mindre end den omgivende lufts temperatur. Reservoirets gas vil derfor erholde varmetilførsel ved ledning gjennem væggene fra den omgivende luft ved ledning gjennem væggen. Den virkelige udløbsmængde Q i t sekunder vil derfor ligge mellem den værdi af Q, som man erholder ved at antage, at reservoiret ingen varmetilførsel faar, og den værdi af Q, man erholder ved at antage, at reservoirets temperatur er konstant under udstrømningen.

Den i tiden t tilførte varmemængde Q_v kan findes, naar man kjender karvæggenes varmeledningsevne a, og deres fladeindhold S og tykkelse E. Er T_0 den ydre lufts temperatur og T temperaturen af gasen i reservoiret, saa er under den forudsætning, at T er konstant, den af den ydre luft til gasen i reservoiret i ét sekund afgivne varmemængde: $\frac{aS}{E}(T_0 - T)$. I tidselementet dt vil derfor den tilførte varmemængde være:

$$d\,Q_v = \frac{a\,S}{E}\,(T_0 - T)\,dt$$

og den tilførte varmemængde i tiden t:

$$Q_v = \frac{a\,S}{E}\int_0^t (T_0 - T)\,dt$$

Denne varmemængde kan ikke sættes lig h $(T_0 - T)$, hvor h er en konstant, af t uafhængig størrelse. Thi hvis

$$\frac{a\,S}{E}\int_0^t (T_0 - T)\,dt = h\,(T_0 - T),$$

saa faar man ved at differentiere med hensyn paa tiden;

$$\frac{a\,S}{E}\,(T_0 - T) = h.\,d\,\frac{(T_0 - T)}{dt}$$

Da nu a, S, E og h er konstante størrelser, blir saaledes differentialforholdet af en funktion lig funktionen selv, multipliceret med en konstant størrelse, hvilket i almindelighed er en umulighed. Den eneste funktion, som tilfredsstiller denne relation, er exponentialfunktionen. Hvis

$$\frac{a\,S}{E\,h}\,(T_0 - T) = \frac{d\,(T_0 - T)}{dt}$$

saa blir:

$$T_0 - T = e^{\frac{a\,S}{E\,h}\,t}$$

Den tilførte varmemængde Q_v blir da:

$$Q_v = h\,(T_0 - T) = h.\,e^{\frac{a\,S}{E\,h}\,.\,t}$$

Men relationen $Q_v = h\,e^{\frac{a\,S}{E\,h}\,.\,t}$ er en umulighed, medmindre $h = 0$. Thi ved begyndelsen af udstrømningen, naar $t = 0$, er ogsaa $Q_v = 0$. Men sættes $t = 0$ i ligningen, blir $e^{\frac{a\,S}{E}\,t} = 1$, hvis $\frac{a\,S}{E}$ er en endelig størrelse. Er $\frac{a\,S}{E}$ uendelig stor, blir værdien af $e^{\frac{a\,S}{E}\,t}$, naar $t = 0$, lig eller større end 1. Er b værdien af $e^{\frac{a\,S}{E}\,t}$, naar $t = 0$, blir

$$0 = h\,b\,e^{\frac{1}{h}}$$

en ligning, som kun kan tilfredstilles ved værdien $h = 0$.

Vi ser saaledes, at relationen

$$\frac{a\,S}{E}\,(T_0 - T) = \frac{h\,d\,(T_0 - T)}{dt}$$

der, naar $T_0 - T$ er en funktion af t, kun kan tilfredsstilles ved en exponentialfunktion, leder til, at koefficienten h maa være lig 0. Følgelig maa den tilførte varmemængde være lig nul, naar $T_0 - T$ er en funktion af tiden. Skal relationen tilfredsstilles, naar den tilførte varmemængde ikke er nul, og følgelig h ogsaa er forskjellig fra nul, maa $T_0 - T$ ikke være en funktion af tiden, altsaa maa $T_0 - T$ være lig nul, eller temper turen maa være konstant. Men er $T_0 - T = 0$, saa maa, naar den tilførte varmemængde tilfredsstiller ligningen: $Q_v = h\,(T_0 - T)$, koefficienten $h = \infty$. Da nu

$$n = \frac{h + c_p}{h + c_v}$$

blir følgelig $n = 1$, naar $T = T_0$. Naar den tilførte varmemængde Q_v er nul, og $h = 0$, blir derimod:

$$n = \frac{c_p}{c_v} = k$$

Da den tilførte varmemængde er

$$Q_v = \frac{a\,S}{E}\int_0^t (T_0 - T)\,dt$$

maa følgelig, naar $T_0 - T = 0$, og Q_v forskjelig fra 0, $\frac{a\,S}{E}$ være uendelig stor. Er derimod $Q_v = 0$, medens $T_0 - T$ er forskjellig fra 0, maa $\frac{a\,S}{E}$ være uendelig liden.

I første tilfælde, hvor temperaturen af gasen i reservoiret er lig den ydre lufts temperatur, maa væggenes fladeindhold være uendelig stor, eller deres tykkelse være uendelig liden; i andet tilfælde, hvor $\frac{a\,S}{E} = 0$, maatte væggenes tykkelse E være uendelig stor. I praksis vil derfor i almindelighed, naar varmemeddelelsen sker ved ledning gjennem reservoirets vægge, ikke den betingelse kunne fyldestgjøres, at den tilførte varmemængde er lig temperaturforandringen, multipliceret med en konstant, af tiden uafhængig størrelse. Den tilførte varmemængde vil foruden af temperaturforandringen ogsaa afhænge af tiden, som er medgaaet til temperaturforandringen.

Loven, hvorefter expansionen af gasen i reservoiret foregaar, vil derfor i almindelighed ikke kunne udtrykkes ved relationen: $p\,v^n$ = konstant. Relationen $p\,v^n$ = konstant fyldesgjøres kun, hvis enten $\frac{a\,S}{E} = \infty$, hvilket medfører, at størrelsen af væggenes overflade S er uendelig stor, eller deres tykkelse E uendelig liden;

eller hvis $\frac{aS}{E} = 0$, hvilket medfører, at væggenes tykkelse er uendelig stor. Ved endelige værdier af $\frac{aS}{E}$ udtrykker ikke ligningen $pv^n =$ konstant loven for expansionen.

Forbindelsesligningen mellem p og v ved endelige værdier af $\frac{aS}{E}$ kan tilnærmelsesvis findes, naar $\frac{Q}{Vg\varrho_0}$ er en meget liden størrelse. Man kan nemlig isaafald tilnærmelsesvis sætte temperaturforandringen $T_0 - T$ proportional med tiden t; altsaa:

$$T_0 - T = Kt,$$

hvor K er en konstant størrelse. Fra geometrisk synspunkt blir dette istedetfor den krumme linie, der repræsenteres ved ligningen $y = T_0 - T = f(t)$, at sætte den rette linie $y = Kt$. Dette er som tilnærmelse tilladeligt, naar det stykke af den krumme linie, man betragter, er lidet. Sættes $T_0 - T = Kt$, blir den tilførte varmemængde:

$$Q_v = \frac{aS}{E} \int_0^t Kt\,dt = \frac{aS}{2E} Kt^2 = \frac{aS}{2E}(T_0 - T)t$$

Koefficienten for temperaturforandringen blir følgelig proportional med tiden t. Kaldes $\frac{aS}{2E} = r$, blir saaledes:

$$Q_v = rt(T_0 - T).$$

Denne ligning i forbindelse med ligningen:

$$T_0 - T = Kt$$

og den almindelige tilstandsligning

$$pv = RT$$

og ligningen for den i tidselementet tilførte varmemængde:

$$dQ_v = A\,p\,dv + c_v\,dT$$

bestemmer problemet.

Differentieres ligningen $Q_v = rt(T_0 - T)$, faaes:

$$dQ_v = (T_0 - T)\,r\,dt - rt\,dT$$

Indsættes heri $t = \frac{T_0 - T}{K}$, og $dt = -\frac{dT}{K}$, faaes:

$$dQ_v = -\frac{2r}{K}(T_0 - T)\,dT$$

$$= A\,p\,dv + c_v\,dT$$

Følgelig:

$$\left(\frac{2r}{K}(T_0 - T) + c_v\right) dT = -A\,p\,dv.$$

Differentieres tilstandsligningen $pv = RT$, faaes:

$$p\,dv + v\,dp = R\,dT,$$

og naar man heri indsætter dT:

$$p\,dv + v\,dp = \frac{-AR\,p\,dv}{\frac{2r}{K}(T_0 - T) + c_v}$$

Nu er $T_0 = \frac{p_0 v_0}{R}$, og $T = \frac{pv}{R}$, Indsættes dette, faaes:

$$p\,dv + v\,dp = \frac{-AR\,p\,dv}{\frac{2r}{K}\left(\frac{p_0 v_0 - pv}{R}\right) + c_v}$$

Denne differentialligning integreres ved at sætte pv lig en ny variabel u. Man faar da:

$$pv = u$$

$$p\,dv + v\,dp = du$$

Indsættes dette i differentialligningen, faaes:

$$du = \frac{-AR\,p\,dv}{\frac{2r}{K}\left(\frac{p_0 v_0 - u}{R}\right) + c_v}$$

Sættes nu

$$\frac{2r}{RK} = s,$$

blir:

$$du = \frac{-AR\,p\,dv}{s p_0 v_0 - su + c_v}$$

$$du(s p_0 v_0 + c_v) - su\,du = -AR\,p\,dv$$

Af ligningen $pv = u$ følger:

$$p = \frac{u}{v}$$

Indsættes dette, faaes:

$$du(s p_0 v_0 + c_v) - su\,du = -\frac{AR\,u\,dv}{v}$$

$$(s p_0 v_0 + c_v)\frac{du}{u} - s\,du = -AR\frac{dv}{v}$$

$$(s p_0 v_0 + c_v)\log\text{nat}\,u - su = -AR\log\text{nat}\,v + C$$

Konstanten C kan nu sættes under formen:

$$C = -AR\log\text{nat}\,f$$

Man faar da:

$$(s p_o v_o + c_v) \log nat\, u - s u = - A R \log nat\, f v$$

$$\log nat \left(u^{s p_o v_o + c_v} (f v)^{A R}\right) = s u$$

$$u^{s p_o v_o + c_v} (f v)^{A R} = e^{s u}$$

Indsættes nu $u = p v$, faaes:

$$(p v)^{s p_o v_o + c_v} (f v)^{A R} = e^{s p v}$$

Naar $p = p_o$, er $v = v_o$, følgelig:

$$(p_o v_o)^{s p_o v_o + c_v} (f v_o)^{A R} = e^{s p_o v_o},$$

$$\left(\frac{p v}{p_o v_o}\right)^{s p_o v_o + c_v} \left(\frac{v}{v_o}\right)^{A R} = e^{s (p v - p_o v_o)}$$

Dette er tilstandsligningen ved expansionen af gasen i reservoiret, naar man betragter udstrømningen i en kort tid og som tilnærmelse sætter $T_o - T = K t$.

Er den tilførte varmemængde nul, saa er, da $Q_v = r t (T_o - T)$, $r = 0$, idet nemlig $T_o - T$ er forskjellig fra 0. Da $s = \frac{2 r}{K R}$, blir følgelig ogsaa $s = 0$. Indsættes dette i ovenstaaende ligning, faaes:

$$\left(\frac{p v}{p_o v_o}\right)^{c_v} \left(\frac{v}{v_o}\right)^{A R} = e^{0} = 1$$

$$\left(\frac{p}{p_o}\right)^{c_v} \left(\frac{v}{v_o}\right)^{A R + c_v} = 1$$

Da nu $A R + c_v = c_p = k c_v$, faaes følgelig:

$$\frac{p}{p_o} \left(\frac{v}{v_o}\right)^{k} = 1$$

$$p v^{k} = p_o v_o^{k}$$

Er derimod temperaturen konstant, $T_o - T = 0$, saa blir, da $T_o - T = K t$, ogsaa $K = 0$, og da $s = \frac{2 r}{K R}$ blir $s = \infty$. Ophøies nu tilstandsligningen:

$$\left(\frac{p v}{p_o v_o}\right)^{s p_o v_o + c_v} \left(\frac{v}{v_o}\right)^{A R} = e^{s (p v - p_o v_o)}$$

i potensen $\frac{1}{s p_o v_o + c_v}$, faaes:

$$\frac{p v}{p_o v_o} \left(\frac{v}{v_o}\right)^{\frac{A R}{s p_o v_o + c_v}} = e^{\frac{s (p v - p_o v_o)}{s p_o v_o + c_v}}$$

Nu er $pv = Rt$ og $p_0 v_0 = RT_0$; følgelig $pv - p_0 v_0 = R(T_0 - T) = 0$. Man faar saaledes:

$$\frac{pv}{p_0 v_0}\left(\frac{v}{v_0}\right)^0 = e^0 = 1$$

$$\frac{pv}{p_0 v_0} = 1,$$

hvilket er tilstandsligningen for expansion ved konstant temperatur.

Tilstandsligningen ved expansionen af gasen i reservoiret kan skrives saaledes:

$$\frac{p}{p_0}\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{sp_0 v_0 + AR + c_v}{sp_0 v_0 + c_v}} = e^{\frac{s(pv - p_0 v_0)}{sp_0 v_0 + c_v}} =$$

$$= \frac{p}{p_0}\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{sp_0 v_0 + c_p}{sp_0 v_0 + c_v}},$$

da $AR + c_v = c_p$.

Naar der er strømmet ud en gasmængde $Q = q\,Vg\,\varrho_0$, hvor V er reservoirets volum og ϱ_0 tætheden ved bevægelsens begyndelse, saa er tætheden af gasen i reservoirets ϱ'_0 bestemt ved ligningen:

$$Vg\,\varrho'_0 + Q = Vg\,\varrho'_0 + q\,Vg\,\varrho_0 = Vg\,\varrho_0,$$

hvoraf følger:

$$\varrho'_0 = \varrho_0\,(1 - q).$$

Da $v = \dfrac{1}{g\,\varrho'_0}$, og $v_0 = \dfrac{1}{g\,\varrho_0}$ saa blir:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{g\,\varrho_0}{g\,\varrho'_0} = \frac{1}{1 - q}$$

Man faar følgelig, naar gasmængden Q er strømmet ud, trykket p af gasen i reservoiret bestemt ved ligningen:

$$\frac{p}{p_0}(1 - q)^{-\left(\frac{sp_0 v_0 + c_p}{sp_0 v_0 + c_v}\right)} = e^{\frac{s(pv - p_0 v_0)}{sp_0 v_0 + c_v}} =$$

$$= e^{\frac{s\left(pv_0\left(\frac{1}{1-q}\right) - p_0 v_0\right)}{sp_0 v_0 + c_v}}$$

Udvikles nu $(1 - q)^{-\left(\frac{sp_0 v_0 + c_p}{sp_0 v_0 + c_v}\right)}$ i række, faaes:

$$(1-q)^{-\left(\frac{sp_0 v_0 + c_p}{sp_0 v_0 + c_v}\right)} = 1 + q\,\frac{sp_0 v_0 + c_p}{sp_0 v_0 + c_v} +$$

$$\frac{q^2}{2}\left(\frac{sp_0 v_0 + c_p}{sp_0 v_0 + c_v}\right)\left(\frac{sp_0 v_0 + c_p}{sp_0 v_0 + c_v} + 1\right) + \ldots$$

Koefficienten for $\frac{q^2}{2}$ vil ligge mellem værdierne 2 og k (k + 1). Er nemlig s meget stor, vil koefficienten for $\frac{q^2}{2}$ nærme sig 2; er derimod s meget liden, vil koefficienten nærme sig k (k + 1). Koefficienten for q^2 vil saaledes ligge mellem 1 og $\frac{k(k+1)}{2}$.

Udvikles exponentfunktionen $e^{\frac{s(pv_0(1-q)^{-1} - p_0 v_0)}{sp_0 v_0 + c_v}}$ i række, faaes:

$$e^{\frac{s(pv_0(1-q)^{-1} - p_0 v_0)}{sp_0 v_0 + c_v}} = 1 + \frac{s(pv_0(1-q)^{-1} - p_0 v_0)}{sp_0 v_0 + c_v}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{s(pv_0(1-q)^{-1} - p_0 v_0)}{sp_0 v_0 + c_v}\right)^2 + \ldots$$

Anden potens i denne række vil for alle værdier af s være en liden størrelse af 2den orden, da nemlig $\frac{pv - p_0 v_0}{p_0 v_0}$ er en liden størrelse. Sætter man nu ud af betragtning de smaa størrelser af 2den orden, $\left(\frac{pv - p_0 v_0}{p_0 v_0}\right)^2$ og q^2, faar man:

$$\frac{p}{p_0}\left(1 + q\,\frac{sp_0 v_0 + c_p}{sp_0 v_0 + c_v}\right) = 1 + \frac{spv_0(1-q)^{-1} - sp_0 v_0}{sp_0 v_0 + c_v}$$

$$\frac{p}{p_0}\left(1 + q\,\frac{sp_0 v_0 + c_p}{sp_0 v_0 + c_v}\right) - \frac{sp_0 v_0(1-q)^{-1}}{sp_0 v_0 + c_v} = 1 - \frac{sp_0 v_0}{sp_0 v_0 + c_v}$$

$$\frac{p}{p_0}\left(1 + q\,\frac{sp_0 v_0 + c_p}{sp_0 v_0 + c_v} - \frac{sp_0 v_0(1-q)^{-1}}{sp_0 v_0 + c_v}\right) = 1 - \frac{sp_0 v_0}{sp_0 v_0 + c_v}$$

Nu er:

$$(1-q)^{-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

Følgelig bliver:

$$\frac{p}{p_0}\left(\frac{s p_0 v_0 + c_v + q s p_0 v_0 + q c_p - s p_0 v_0 (1 + q + q^2 + \ldots)}{s p_0 v_0 + c_v}\right) =$$

$$= 1 - \frac{s p_0 v_0}{s p_0 v_0 + c_v}$$

$$\frac{p}{p_0}\left(\frac{c_v + q c_p - s p_0 v_0 (q^2 + q^3 + \ldots)}{s p_0 v_0 + c_v}\right) = \frac{c_v}{s p_0 v_0 + c_v}$$

$$p = p_0 \frac{c_v}{c_v + q c_p - s p_0 v_0 (q^2 + q^3 + \ldots)}$$

$$p = p_0 \frac{1}{1 + q k - \frac{s p_0 v_0}{c_v}(q^2 + q^3 + q^4 + \ldots)}$$

$$p = p_0 \left(1 - q k + q^2\left(k^2 + \frac{s p_0 v_0}{c_v}\right) - q^3\left(k^3 - \frac{s p_0 v_0}{c_v}\right) + \ldots\right)$$

Nu er:

$$s = \frac{2r}{KR};\ r = \frac{aS}{2E} \text{ og } K = \frac{T_0 - T}{t_1},$$

hvor T er temperaturen ved slutten af udløbet og t_1 den givne udløbstid. Temperaturen T findes ved at bemærke at

$$pv = RT \text{ og } p_0 v_0 = RT_0; \text{ følgelig}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{v_0}{v}\frac{T}{T_0} = (1 - q)\frac{T}{T_0}$$

Man faar altsaa:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{1}{1 - q}\right)\left(1 - q k + q^2\left(k^2 + \frac{s p_0 v_0}{c_v}\right) - \ldots\right)$$

$$= (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)\left(1 - qk + q^2\left(k^2 + \frac{s p_0 v_0}{c_v}\right) - \ldots\right)$$

$$T = T_0\left(1 - q(k - 1) + q^2\left(k^2 - k + 1 + \frac{s p_0 v_0}{c_v}\right) + \ldots\right)$$

$$T_0 - T = T_0\left(q(k - 1) \div q^2\left(k^2 - k + 1 + \frac{s p_0 v_0}{c_v}\right) + \ldots\right)$$

Sættes nu som første tilnærmelse det led, som indeholder q^2 ud af betragtning, faaes:

$$T_0 - T = q(k - 1) T_0 \text{ og } K_1 = \frac{q(k - 1) T_0}{t_1}$$

Heraf følger:

$$s = \frac{2r}{KR} = \frac{2r\,t_1}{q\,(k-1)\,R\,T_0}$$

$$s\,p_0\,v_0 = s\,R T_0 = \frac{2r\,t_1}{q\,(k-1)}$$

Indsættes nu den fundne værdi af $s\,p_0\,v_0$ i formlen for $T_0 - T$, faaes:

$$T_0 - T = T_0 \left(q\,(k-1) - q^2 \left(k^2 - k + 1 + \frac{2r\,t_1}{c_v\,(k-1)\,q}\right)\right.$$

$$= T_0 \left(q \left(k - 1 - \frac{2r\,t_1}{c_v\,(k-1)} \right) - q^2 (\,\ldots\,) \right)$$

Af denne mere tilnærmede værdi af $T_0 - T$ findes en mere tilnærmet værdi af K og s. Man faar:

$$K_2 = \frac{T_0 - T}{t_1} = \frac{T_0\,q}{t_1} \left(k - 1 - \frac{2r\,t_1}{c_v\,(k-1)}\right) \text{ og}$$

$$s = \frac{2r\,t_1}{\left(q \left(k - 1 - \frac{2r\,t_1}{c_v\,(k-1)}\right) R T_0\right.}$$

$$s\,p_0\,v_0 = \frac{2r\,t_1}{q \left(k - 1 - \frac{2r\,t_1}{c_v\,(k-1)}\right)}$$

Af denne værdi af $s\,p_0\,v_0$ finder man ved indsætning i formlen for $T_0 - T$ en endnu mere tilnærmet værdi af K. Man finder:

$$K_3 = \frac{T_0\,q}{t_1} \left(k - 1 - \frac{2r\,t_1}{c_v \left(k - 1 - \frac{2r\,t_1}{c_v\,(k-1)}\right)}\right.$$

og saaledes videre. Ved at indsætte denne værdi af K i udtrykket $s\,p_0\,v_0$ findes en ny værdi af $T_0 - T$ og K:

$$K_4 = \frac{T_0\,q}{t_1} \left(k - 1 - \frac{2r\,t_1}{c_v \left(k - 1 - \frac{2r\,t_1}{c_v \left(k - 1 - \frac{2r\,t_1}{c_v\,(k-1)}\right)}\right)}\right.$$

Man ser af disse formler for K, at

$$K_2 = \frac{T_0\,q}{t_1} \left(k - 1 - \frac{2r\,t_1}{\frac{c_v\,t_1}{q\,T_0} K_1}\right); \quad K_3 = \frac{T_0\,q}{t_1} \left(k - 1 - \frac{2r\,t_1}{\frac{c_v\,t_1}{q\,T_0} K_2}\right)$$

$$K_4 = \frac{T_0\,q}{t_1} \left(k - 1 - \frac{2r\,t_1}{\frac{c_v\,t_1}{q\,T_0} K_3}\right) \text{ og saaledes videre:}$$

$$K_n = \frac{T_0\, q}{t_1}\left(k - 1 - \frac{2r\, t_1}{\frac{c_v\, t_1}{q\, T_0}\, K_n - 1}\right)$$

Har man paa denne maade fundet en værdi af $K = K_n$ med tilstrækkelig nøiagtighed, blir:

$$s = \frac{2r}{K_n\, R} = \frac{2r\, t_1}{q\, T_0\, R\left(k - 1 - \frac{2r\, t_1}{\frac{c_v\, t_1}{q\, T_0}\, K_n - 1}\right)}$$

$$s\, p_0\, v_0 = s\, R\, T_0 = \frac{2r\, t_1}{q\left(k - 1 - \frac{2r\, t_1}{\frac{c_v\, t_1}{q\, T_0}\, K_n - 1}\right)}$$

Indsættes denne værdi af $s\, p_0\, v_0$ i formlerne for T og p, faaes:

$$T = T_0\left(1 - q\left(k - 1 - \frac{2r\, t_1}{c_v\left(k - 1 - \frac{2r\, t_1\, q\, T_0}{c_v\, t_1\, K_n - 1}\right)}\right)\right)$$

$$p = p_0\left(1 - q\left(k - \frac{2r\, t_1}{c_v\left(k - 1 - \frac{2r\, t_1\, q\, T_0}{c_v\, t_1\, K_n - 1}\right)}\right) + \right.$$

$$\left. + q^2\left(k^2 + \frac{2r\, t_1}{c_v\left(k - 1 - \frac{2r\, t_1\, q\, T_0}{c_v\, t_1\, K_n - 1}\right)}\right)\right)$$

Ved disse formler er at mærke, at q i udtrykket $\frac{2r\, t_1\, q\, T_0}{c_v\, t_1\, K_n - 1}$ forsvinder, da nemlig ogsaa faktoren $K_n - 1$ indeholder q, idet den er lig et udtryk M, multipliceret med E.

Naar man nu i udtrykket for dt indsætter den foran fundne værdi af p istedetfor den forhen brugte formel:

$$p = p_0\,(1 - q)^n = p_0\left(1 - nq + \frac{n\,(n-1)}{2}\, q^2\right),$$

findes vægten af det i t sekunder udstrømmende fluidum Q af formlerne:

$$Q = q\, V g\, \varrho_0 = Q_1 t_1\left(1 - \frac{Q_1\, t_1}{V g\, \varrho_0}\left(\frac{A+B}{2}\right) + \left(\frac{Q_1\, t_1}{V g\, \varrho_0}\right)^2 \frac{(A+B)^2}{2.\,3} - \ldots\right)$$

$$Q = Q_1\, t_1\left(1 - \frac{Q_1\, t_1}{V g\, \varrho_0}\left(\frac{A+B}{2}\right) + \left(\frac{Q_1\, t_1}{V g\, \varrho_0}\right)^2\left(\frac{(A+B)^2 + 2F}{2.\,3}\right) - \ldots\right),$$

idet man i udtrykkene for A, B og F, nemlig:

$$A = \frac{p_0 (1 + n)}{2 (p_0 - p_1)}; \quad B = \frac{n\, p_0 (1 + a)}{2k (p_0 (1 + a) + p_1 a)}$$

$$F = \frac{n (n - 1)}{2} \left(\frac{p_0}{2 (p_0 - p_1)} + \frac{B}{n} \right) + A\, B + \left(\frac{1 - 2k}{2} \right) B^2 -$$

$$- \frac{A^2}{2} - \frac{p_0\, n}{2 (p_0 - p_1)}$$

sætter:

$$n = k - \frac{2 r\, t_1}{c_v \left(k - 1 - \frac{2 r\, t_1\, q\, T_0}{c_v\, t_1\, K_n - 1} \right)}$$

$$\frac{n (n - 1)}{2} = k^2 + \frac{2 r\, t_1}{c_v \left(k - 1 - \frac{2 r\, t_1\, q\, T_0}{c_v\, t_1\, K_n - 1} \right)}$$

og bemærker, at Q_1 er vægten af det i ét sekund udstrømmende fluidum, naar tilstanden — trykket og temperaturen — af gasen i reservoiret ikke forandres.

Er saaledes $K_n = K_1$, blir:

$$p = p_0 \left(1 - q \left(k - \frac{2 r\, t_1}{c_v (k - 1)} \right) + q^2 \left(k^2 + \frac{2 r\, t_1}{c_v (k - 1)} \right) \ldots \right)$$

$$n = k - \frac{2 r\, t_1}{c_v (k - 1)}; \quad \frac{n (n - 1)}{2} = k^2 + \frac{2 r\, t_1}{c_v (k - 1)}$$

Er $K_n = K_2$, blir:

$$p = p_0 \left(1 - q \left(k - \frac{2 r\, t_1}{c_v \left(k - 1 - \frac{2 r\, t_1}{c_v (k - 1)} \right)} \right) + \right.$$

$$\left. + q^2 \left(k^2 + \frac{2 r\, t_1}{c_v \left(k \div 1 \div \frac{2 r\, t_1}{c_v (k - 1)} \right)} \right) - \ldots \right)$$

$$n = k - \frac{2 r\, t_1}{c_v \left(k - 1 - \frac{2 r\, t_1}{c_v (k - 1)} \right)}$$

$$\frac{n (n - 1)}{2} = k^2 + \frac{2 r\, t_1}{c_v \left(k - 1 - \frac{2 r\, t_1}{c_v (k - 1)} \right)}$$

Af formlen for $T_0 - T$, nemlig:

$$T_0 - T = q\, T_0 \left(k - 1 - \frac{2 r\, t_1}{c_v \left(k - 1 - \frac{2 r\, t_1\, q\, T_0}{c_v\, t_1\, K_n - 1} \right)} \right)$$

sees, at koefficienten for $q\, T_0$ blir negativ, følgelig $T_0 < T$, naar

$$\frac{2r\,t_1}{c_v\left(k-1-\dfrac{2r\,t_1\,q\,T_0}{c_v\,t_1\,K_n-1}\right)} > k-1.$$

Formlen vil isaafald ikke gjælde længere, da T ikke kan blive større end T_0. Grænsen for formlens gyldighed er endnu snevrere. Da $T_0 - T$ for meget smaa værdier af t_1 er voxende, idet q, naar udløbstversnittet er konstant, voxer med udløbstiden t_1, medens $T_0 - T$ for en vis værdi af t_1 vil blive nul og for endnu større negativ, maa følgelig $T_0 - T$ for en vis værdi af t blive et maximum. Kaldes denne værdi af udløbstiden t_{max}, vil altsaa efter formlen $T_0 - T$ for værdier af udløbstiden, større end t_{max}, formindskes. Men dette er, naar udløbstversnittet er konstant, en umulighed. Formlen for $T_0 - T$ vil derfor ikke kunne gjælde længere, naar udløbstiden overstiger t_{max}. Størrelsen af t_{max} findes ved i formlen for $T_0 - T$ at indsætte værdien af $q = \frac{Q}{Vg\,\varrho_0}$, hvor $Q = Q_1\,t_1\left(1 - \frac{Q_1\,t_1}{Vg\,\varrho_0}\left(\frac{A+B}{2}\right) + \ldots\right)$. Man kan tilnærmelsesvis sætte $q = \frac{Q_1\,t_1}{Vg\,\varrho_0}$ og faar da:

$$T_0 - T = T_0\,\frac{Q_1}{Vg\,\varrho_0}\left((k-1)\,t_1 - \frac{2r\,t_1^2}{c_v\left(k-1-\dfrac{2r\,t_1\,q\,T_0}{c_v\,t_1\,K_n-1}\right)}\right)$$

$T_0 - T$ blir et maximum, naar

$$\frac{d\,(T_0 - T)}{dt_1} = \frac{T_0\,Q_1}{Vg\,\varrho_0}\,\frac{d}{dt_1}\left\{(k-1)\,t_1 - \frac{2r\,t_1^2}{c_v\left(k-1-\dfrac{2r\,t_1\,q\,T_0}{c_v\,t_1\,K_n-1}\right)}\right\} = 0.$$

Af denne ligning findes den største værdi, som $2r\,t_1$ kan have, naar formlerne skal kunne anvendes.

Er f. ex. $K_n = K_1$, blir ligningen:

$$\frac{T_0\,Q_1}{Vg\,\varrho_0}\,\frac{d}{dt_1}\left((k-1)\,t_1 - \frac{2r\,t_1^2}{c_v\,(k-1)}\right) = \frac{T_0\,Q_1}{Vg\,\varrho_0}\left(k-1-\frac{4r\,t_1}{c_v(k-1)}\right) = 0$$

$$2r\,t_1 = \frac{c_v\,(k-1)^2}{2}$$

Er $K_n = K_2$, finder man, at betingelsen, at maximum ikke er naaet, er mere end fyldestgjort, naar

$$2r\,t_1 = \frac{c_v\,(k-1)^2}{3}$$

Vil man bruge en K med et endnu høiere mærke end 2, vil man finde, at maximumværdien af $T_0 - T$ indtræder ved en endnu mindre værdi af $2r\,t_1$.

Er altsaa $2r\,t_1 > \frac{c_v\,(k-1)^2}{2}$, vil formlerne være ubrugelige. Man maa da dele den givne udløbstid t_1 i mindre tidslængder, der fyldestgjør betingelsen: $2r\,t_1 < \frac{c_v\,(k-1)^2}{2}$, og finde tilstandsforandringen og udløbsmængden i hver enkelt af disse mindre tidslængder. Som tilnærmelse kan man dog nøie sig med at finde tilstandsforandringen i en enkelt af disse tidslængder, naar man lader hver af tidsdelene være ligestore og multiplicerer med deres antal. Tilnærmelsen vil blive størst, naar man finder tilstandsforandringen og udløbsmængden ved midten af den givne udløbstid. Trykket i reservoiret ved midten af den givne ubløbstid p_m kan man tilnærmelsesvis antage er lig middeltallet mellem trykket ved bevægelsens begyndelse og dens ende; og trykket ved enden af bevægelsen kan tilnærmelsesvis sættes lig $p_o\,(1-q\,k)$. Man faar saaledes:

$$p_m = \frac{p_o + p_o\,(1-q\,k)}{2}$$

Ved beregningen af tilstandsforandringen og udløbsmængden i en enkelt tidsdel benyttes p_m som indre tryk istedetfor p_o.

Ved beregningen af tilstandsforandringen i en enkelt tidsdel kan man ikke anvende de foran udviklede formler, da nemlig tilstandsligningen vil være en anden. Ved de foran udviklede formler forudsættes, at temperaturen af gasen i reservoiret ved bevægelsens begyndelse er lig den ydre lufts temperatur. Ved beregningen af tilstandsforandringen i de enkelte tidslængder, hvori den givne udløbstid er delt, vil derimod, undtagen for den første dels vedkommende, temperaturen af gasen i reservoiret ved bevægelsens begyndelse være mindre end den ydre lufts temperatur. Vi maa derfor ogsaa løse det mere almindelige problem, at finde tilstandsligningen, naar temperaturen af gasen i reservoiret ved bevægelsens begyndelse er forskjellig fra den ydre lufts temperatur. Løsningen heraf har ingen vanskelighed, naar man gaar ud fra som tilnærmelse, at tilvexten af differentsen mellem den ydre lufts temperatur og temperaturen i reservoiret er proportional med tiden. Er H differentsen mellem den ydre lufts temperatur og temperaturen af gasen i reservoiret ved bevægelsens begyndelse, som vi betegner med T_o, og T temperaturen under bevægelsen efter tidslængden t, saa er altsaa forudsætningen, at

$$H + T_o - T = Kt.$$

Den tilførte varmemængde blir:

$$Q_v = \frac{aS}{E}\int_0^t (H + T_o - T)\,dt = \frac{aS}{E}\int_0^t K\,t\,dt$$

$$= \frac{aS}{E}K\frac{t^2}{2} = \frac{aS}{2E}(H + T_o - T)\,t$$

$$= r\,(H + T_o - T)\,t.$$

Af ligningen $H + T_0 - T = Kt$ følger, at

$$t = \frac{H + T_0 - T}{K} \text{ og } dt = -\frac{dT}{K}.$$

Af ligningen for Q_v faaes ved differentiation og ved indsættelse af værdien af t og dt

$$dQ_v = r(H + T_0 - T)\,dt - rt(H + T_0 - T)\,dT$$

$$= -\frac{2r}{K}(H + T_0 - T)\,dT = Ap\,dv + c_v\,dT,$$

hvoraf:

$$dT = \frac{-Ap\,dv}{c_v + \frac{2r}{K}(H + T_0 - T)}$$

Ved differentiation af tilstandsligningen: pv RT, faaes:

$$p\,dv + v\,dp = R\,dT = -\frac{AR\,p\,dv}{c_v + \frac{2r}{KR}(H + T_0 - T)}$$

$$= -\frac{AR\,p\,dv}{c_v + \frac{2r}{KR}(HR + p_0 v_0 - pv)}$$

Denne differentialligning integreres som forhen paavist ved at sætte pv lig en ny variabel u, og man faar, naar $\frac{2r}{KR} = s$:

$$\frac{p}{p_0}\left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{s(RH + p_0 v_0) + c_p}{s(RH + p_0 v_0) + c_v}} = e^{\frac{s(pv - p_0 v_0)}{s(RH + p_0 v_0) + c_v}}$$

Heraf erholdes ved rækkeudvikling, naar $\frac{v}{v_0} = (1 - q)^{-1}$ indsættes:

$$\frac{p}{p_0}\Big(1 - q\frac{s(RH + p_0 v_0) + c_p}{s(RH + p_0 v_0) + c_v} - \frac{s p_0 v_0 (1 - q)^{-1}}{s(RH + p_0 v_0) + c_v} = 1 -$$

$$- \frac{s p_0 v_0}{s(RH + p_0 v_0) + c_v}$$

$$\frac{p}{p_0}\Big(sRH + c_v + q(sRH + c_p) - s p_0 v_0 (q^2 + q^3 + \ldots)\Big) = sRH + c_v$$

$$p = p_0 \frac{sRH + c_v}{sRH + c_v + q(sRH + c_p) - s p_0 v_0 (q^2 + q^3 + \ldots)}$$

$$= p_0\left(1 - q\frac{sRH + c_p}{sRH + c_v} + q^2\left(\frac{s p_0 v_0}{sRH + c_v} + \left(\frac{sRH + c_p}{sRH + c_v}\right)^2 - \ldots\right)\right.$$

$$T = T_0 \frac{p}{p_0}(1 - q)^{-1} = T_0 \frac{p}{p_0}(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)$$

$$= T_0\Big(1 - q\Big(\frac{sRH + c_p}{sRH + c_v} - 1\Big) +$$

$$q^2\Big(\frac{sp_0 v_0}{sRH + c_v} + \Big(\frac{sRH + c_p}{sRH + c_v}\Big)^2 - \frac{sRH + c_p}{sRH + c_v} + 1\Big) - \ldots\Big)$$

Den foran udviklede tilstandsligning og formel for p og T gjælder i almindelighed, naar gasen under expansionen erholder varmetilførsel gjennem karvæggene. Er H negativ, saa er temperaturen af gasen i reservoiret ved bevægelsens begyndelse større end den ydre lufts temperatur. Er $H = 0$, faar man de samme formler, som tidligere er udviklet. Er $H = \infty$, blir $\frac{pv}{p_0 v_0} = e^0 = 1$.

Udløbsmængden Q erholder man af de samme formler, som forhen er fundne, idet man blot i udtrykkene for A, B og F sætter

$$n = \frac{sRH + c_p}{sRH + c_v} - q \frac{sp_0 v_0}{sRH + c_v}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = \Big(\frac{sRH + c_p}{sRH + c_v}\Big)^2 + q \frac{sp_0 v_0}{sRH + c_v}$$

De her udviklede formler benyttes for at finde tilstandsforandringen i hver enkelt tidslængde, hvori den givne udløbstid er delt. H vil da være givet ved den ved beregningen fundne temperatursynken i reservoiret ved hver tidsdels begyndelse. Vil man nøie sig med som tilnærmelse blot at beregne tilstandsforandringen i den midtere tidsdel, sætter man altsaa som indre tryk $p_m = \frac{p_0 + p_0(1 - qk)}{2}$ og $H_m = \frac{T_0 - T}{2}$, hvor T er temperaturen ved enden af den givne udløbstid. Denne kan tilnærmelsesvis sættes lig $T_0(1 - q(k - 1))$, saaledes at

$$H_m = \frac{T_0(2 - q(k-1))}{2}.$$

Værdien af $s = \frac{2r}{KR}$ findes ved at tildele K en af de forhen fundne tilnærmede værdier K_1 eller K_2 o. s. v. K_n.

Den udløbsmængde og den forandring af trykket og temperaturen, som man finder i den midtere tidsdel, multipliceres med forholdet mellem den givne udløbstid og den ved beregningen benyttede tidslængde.

Udløbsmængden og tilstanden af gasen i reservoiret vil ogsaa tilnærmelsesvis kunne bestemmes uden hjælp af den fundne tilstandsligning, naar væggenes varmeledningsevne er kjendt.

Vi har paavist, at forudsætningen, at den tilførte varmemængde er lig temperaturforandringen, multipliceret med en konstant, kun fyldestgjøres, naar enten væggenes tykkelse er uendelig stor og følgelig den tilførte varmemængde er nul, eller naar væggenes tykkelse er uendelig liden og temperaturen er konstant. I første tilfælde, naar varmetilførselen er nul, faaes p og T ved i formlerne at sætte $n = k$; i andet tilfælde ved at sætte $n = 1$. Ved endelige værdier af væggenes tykkelse maa man da erholde p og T ved i formlerne at give n en mellem k og 1 liggende værdi, eller, da $n = \frac{h + c_p}{h + c_v}$, ved at give h en mellem $h = 0$ og $h = \infty$ liggende værdi. Den værdi af h, der gir den sande værdi af p, vil dog være forskjellig fra den værdi af h, der gir værdien af T. Grænserne, mellem hvilke h og n ligger ved en given værdi af $t = t_1$, kan gjøres snevrere. Under forudsætning af, at t_1 er liden, kan man sætte $T_0 - T = Kt$, hvor K er konstant, og varmetilførselen i tiden t blir da $Q = \frac{aS}{2E} t\,(T_0 - T) = h\,(T_0 - T)$; h blir altsaa en med t variabel størrelse. Ved begyndelsen af udstrømningen, hvor $t = 0$, blir $h = 0$; ved enden af udstrømningen, naar $t = t_1$, blir $h_1 = \frac{aS}{2E}\,t_1$. For at nu den forudsætning, at varmetilførselen er lig temperaturforandringen, multipliceret med en konstant, skal fyldestgjøres, maa man betragte udstrømningen i en uendelig kort tid. Ved slutten af udstrømningen, hvor varmetilførselen i et tidselement er størst, blir konstanten, hvormed temperaturforandringen maa multipliceres for at give den i tidselementet tilførte varmemængde, lig $\frac{aS}{E}\,t_1 = 2 h_1$. Man faar saaledes, at den midlere værdi af h maa ligge mellem grænserne $h = \frac{aS}{E}\,t_1$ og $h = 0$.

Grænserne, mellem hvilke de værdier af n ligger, der ved endelige værdier af væggenes tykkelse skal give værdien af Q, p og T, vil altsaa være $n = k$ og $n = \dfrac{\frac{aS\,t_1}{E} + c_p}{\frac{aS\,t_1}{E} + c_v}$. Man kan da som en rimelig tinærmelse sætte

$$h = \frac{aS\,t_1}{2E}$$

og

$$n = \frac{\frac{aS\,t_1}{2E} + c_p}{\frac{aS\,t_1}{2E} + c_v}$$

For tilnærmelsesvis at bestemme udløbsmængden Q og tilstanden af gasen i reservoiret, naar der i tiden t_1 er strømmet ud en gasmængde Q, der er liden i forhold til gasmængden i reservoiret, kan man saaledes benytte relationen $p v^n =$ konstant,

hvor n sættes lig $\dfrac{\dfrac{aS\,t_1}{2E} + c_p}{\dfrac{aS\,t_1}{2E} + c_v}$

Tilstanden af den gas, som strømmer ud, vil derimod bestemmes af relationen $p v^k =$ konstant. Man kan nemlig uden mærkbar feil antage, at selve udstrømningen foregaar uden varmetilførsel baade ved udløb gjennem mundstykker og gjennem tynd væg. Overfladen af mundstykket, hvorigjennem der kan tilføres den udstrømmende gas varme, er nemlig overmaade liden i forhold til den gasmængde, som strømmer ud pr. sekund. Den varmemængde, som gjennem mundstykkets vægge i ét sekund tilføres den udstrømmende gas, vil derfor ikke kunne have nogen mærkbar indflydelse paa dennes temperatur. Hastigheden, hvormed gasen bevæger sig langs mundstykkets vægge, er for stor til, at der kan meddeles den nogen mærkbar varme.

Friktionsmodstanden ved væskers bevægelse.

Ved fluidernes bevægelse langs en begrænsende flade opstaar en modstand, den saakaldte friktionsmodstand. Denne fremkaldes dels af begrænsningsfladens ujevnheder, dels af fluidets klæbrighed. To hinanden berørende tversnit af det strømmende fluidum vil være af forskjellig størrelse og fluidets hastighed i disse forskjellig. Derved fremkommer stød af det hastigere strømmende fluidum og tab af trykhøide. Dette trykhøidetab vil være størst for det nærmest begrænsningsfladen strømmende fluidum. Derved vil ogsaa dettes specifike tryk blive større end det specifike tryk i den del af fluidet, hvor tversnitsforandringen ikke virker i samme grad, og hvor strømningshastigheden derfor er større. Der vil derfor opstaa en strømning af fluidet fra den begrænsende flade lodret paa fluidets bevægelsesretning. Da fluidet, nærmest begrænsningsfladen, har en mindre hastighed i bevægelsesretningen end de fjernere fra begrænsningsfladen strømmende dele af fluidet, vil der følgelig opstaa stød, hvorved disses hastighed formindskes.

Ved fluiders bevægelse i rør vil saaledes hastigheden i nærheden af rørets omkreds være mindst og voxe til maximumshastighedan ved rørets axe.

Den her fremstillede betragtningsmaade af friktionen vil være af betydning for meteorologien.

Naar vinden blæser langs jordens overflade, vil der ogsaa fremkomme et opad virkende luftdrag, der fører lette legemer fra jordens overflade op i luften. Ved meget stærk blæst kan det opad virkende luftdrag udvikle en betydelig kraft og blive istand til at hæve tunge gjenstande.

Vil man nøie sig med den antagelse, at hastigheden og følgelig ogsaa det specifike tryk overalt i et og samme tversnit er konstant, saa findes friktionsmodstanden efter formlen for trykhøidetabet ved forsnevringer. Røret vil indeholde en række forsnevringer, hvis antal vil være proportionalt med rørets længde L. Betegnes tværsnittene i forsnevringerne med F_1, $F_2 \ldots F_n$ og de efterfølgende tversnit med T_1, $T_2 \ldots T_n$, hastighederne med v_1, $v_2 \ldots v_n$ og kontraktionskoefficienterne med m_1, $m_2 \ldots m_n$, saa er ved væsker formlen for udløbshastigheden v, naar H er trykhøiden ved rørets begyndelse:

$$\frac{v^2}{2g} = H - m_1 \frac{v_1^2}{g}\left\{1 - \frac{F_1}{T_1}\right\} - m_2 \frac{v_2^2}{g}\left\{1 - \frac{F_2}{T_2}\right\} - \ldots -$$

$$- m_n \frac{v_n^2}{g}\left\{1 - \frac{F_n}{T_n}\right\}$$

Her kan man uden mærkbar feil sætte $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = v$ og $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$. Man faar altsaa:

$$\frac{v^2}{2g} = H - \frac{v^2}{2g} \sum 2\left\{1 - \frac{F}{T}\right\} = H - \frac{v^2}{2g} \sum 2\left\{\frac{T - F}{T}\right\}$$

Er antallet af forsnevringer A, hvor A er proportional med rørets længde L ($A = rL$), saa blir det midlere tversnit i forsnevringen

$$F_m = \frac{F_1 + F_2 + \ldots F_n}{A}$$

og

$$T_m = \frac{T_1 + T_2 + \ldots T_n}{A}$$

Sættes

$$F_1 = F_m + f_1,\ F_2 = F_m + f_2, \ldots F_n = F_m + f_n;$$

$$T_1 = T_m + t_1,\ T_2 = T_m + t_2, \ldots T_n = T_m + t_n,$$

saa blir:

$$\frac{F_1}{T_1} = \frac{F_m}{T_m} + \frac{f_1\left(1 - \frac{F_m t_1}{f_1 T_m}\right)}{T_m + t_1} \ldots$$

$$\frac{F_n}{T_n} = \frac{F_m}{T_m} + \frac{f_n\left\{1 - \frac{F_m t_n}{T_m f_n}\right\}}{T_m + t_n}$$

$$\sum \frac{F}{T} = A\frac{Fm}{Tm} + \sum \frac{f\left\{1 - \frac{Fmt}{Tmf}\right\}}{Tm + t}$$

Da nu f er en liden størrelse og ligesaa $\left\{1 - \frac{Fmt}{Tmf}\right\}$, vil

$\sum \frac{f\left\{1 - \frac{Fmt}{Tmf}\right\}}{Tm + t}$ kunne sættes ud af betragtning i forhold til $A\frac{Fm}{Tm}$. Man faar saaledes:

$$\sum \left\{1 - \frac{F}{T}\right\} = A\left\{1 - \frac{Fm}{Tm}\right\} = r\,L\left\{\frac{Tm - Fm}{Tm}\right\}.$$

Da $Tm - Fm = s\,O$, proportional med tversnittets omkreds O, blir:

$$\frac{v^2}{2g} = H - \frac{v^2}{2g}\,2\,r\,L\,\frac{s\,O}{Tm} = H - \frac{v^2}{2g}\,z\,\frac{O}{Tm}\,L,$$

naar $2\,sr = z$.

Her er klæbrigheden sat ud af betragtning. Tages hensyn til den, maa der tilføies et led, der indeholder hastigheden v i første potens. Friktionstabet faar da formen:

$$\frac{O}{F}L\,(a\,v + b\,v^2)$$

og

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{O}{F}L\,(a\,v + b\,v^2)$$

H er den effektive trykhøide ved ledningsrørets begyndelse. Denne er forskjellig fra den givne trykhøide, idet der lides et trykhøidetab ved udløbet fra reservoiret i ledningsrøret. Vi vil kalde reservoirets munding f og hastigheden ved udstrømningen fra reservoiret gjennem mundingen v', kontraktionskoefficienten m, medens v er hastigheden i ledningsrøret, hvis tversnit F er konstant. Vi vil først betragte bevægelsen i ledningsrøret, hvis heldning antages at være konstant lig α. Kaldes nu trykket ved ledningsrørets begyndelse p_0 og ved dets ende p_1, saa faar man ved at anvende satsen om tilvexten af levende kraft paa et uendelig lidet stykke dl af rørlængden.

$$d\left(\frac{v^2}{2g}\right) = \sin\alpha\,dl - \frac{dp}{g\varrho} - \frac{O}{F}\,(a\,v + b\,v^2)\,dl = 0,$$

da nemlig rørets tversnit er konstant og følgelig ogsaa hastigheden konstant. Man faar da:

$$\frac{dp}{g\varrho} = (\sin\alpha - \frac{O}{F}(av + bv^2))\,dl = h\,dl$$

hvor h er en konstant størrelse. Heraf følger:

$$p = hg\varrho l + K = kl + K.$$

Sættes nu $l = 0$, saa er $p = p_0$; følgelig $K = p_0$ og

$$p = kl + p_0 = p_0 + \left(\sin\alpha - \frac{O}{F}\left(av + bv_2\right)\right) l\, g\varrho$$

Sættes i denne ligning $l = L$, saa er $p = p_1$ og man faar:

$$p_1 = kL + p_0 = p_0 + \left(\sin\alpha - \frac{O}{F}(av + bv^2)\right) L\, g\varrho$$

$$k = -\left(\frac{p_0 - p_1}{L}\right).$$

Følgelig blir:

$$p = p_0 - (p_0 - p_1)\frac{l}{L},$$

der giver loven for trykkets forandring i røret. Denne vil ogsaa kunne findes ved følgende betragtning. I afstanden l fra rørets begyndelse kan man betragte forholdet som udstrømning fra et reservoir, hvor trykket er p og modtrykket $p + dp$ er trykket i i afstanden $l + dl$. Nu maa det specifike tryk af det udstrømmende fluidum være lig trykket i afstanden $l + 2\,dl$. Det specifike tryk af det udstrømmende fluidum er lig trykket i reservoiret p minus den totale krafts tryk, hvilket er lig overtrykket, som er $-dp$, multipliceret med 2m. Da nu $m = 1$, blir følgelig det specifike tryk:

$$p + 2m\,dp = p + 2\,dp.$$

Man faar følgelig trykket i afstanden $l + 2\,dl$ lig $p + 2\,dp$, altsaa voxer dp proportionalt med dl:

$$dp = h\,dl, \text{ hvoraf}$$

$$p = p_0 - (p_0 - p_1)\frac{l}{L}.$$

Vi skal dernæst betragte forholdet ved udstrømningen fra reservoiret i ledningsrøret. Paa grund af kontinuiteten er

$$mf\,v' = Fv;\ v' = \frac{F}{mf}v,$$

$$v'^2 = \frac{F^2}{m^2 f^2}\,v^2$$

Den effektive trykhøide ved udløbet af reservoiret maa følgelig være $\frac{v'^2}{2g} = \frac{F_2}{m^2 f^2}\frac{v^2}{2g}$. Da nu det fra reservoiret udstrømmende vand lider et tab i trykhøide, saaledes at den effektive trykhøide blot er $\frac{1}{2m}$ af den givne trykhøide, maa følgelig denne være $2m \frac{v'^2}{2g} = 2m \frac{F^2}{m^2 f^2} \frac{v^2}{2g}$. Man har følgelig, naar p_r betegner trykket i reservoiret ved mundingen:

$$\frac{p_r - p_o}{g\varrho} = \frac{2}{m} \frac{F^2}{f^2} \frac{v^2}{2g}$$

$$v^2 = \frac{2(p_r - p_o)}{\varrho} \frac{m}{2} \frac{f^2}{F^2} = (p_r - p_o)\, G,$$

idet man sætter: $\frac{m f^2}{\varrho F^2} = G$.

Ovenfor fandtes:

$$\frac{p_o - p_1}{g\varrho} + \sin\alpha\, L = \frac{O}{F}(av + bv^2)\, L.$$

Af disse to ligninger bestemmes v og p_o som funktioner af p_r, p_1, L, a, b, $\frac{O}{F}$ og $\sin \alpha$.

Er ledningsrørets udløbstversnit, som vi vil betegne med f', ikke lig ledningsrørets tversnit F, vil p_1, trykket ved ledningsrørets ende, være forskjelligt fra det ydre modtryk, som vi vil betegne med p'_1. Man finder da p_1 som funktion af p'_1 ved at anvende kontinuitetsligningen paa udløbet af ledningsrøret. Hastigheden v i ledningsrøret vil blive forøget i udløbstversnittet f' paa grund af virkningen af overtrykket $(p_1 - p'_1)$. Trykhøiden for hastigheden i udløbstversnittet vil saaledes være en sum af 2 led, nemlig af trykhøiden for hastigheden v, der er $\frac{v^2}{2g}$, og af trykhøiden, der bestemmes af overtrykket $(p_1 - p'_1)$. Kalder vi hastigheden i udløbstversnittet v'', vil saaledes trykhøiden for v'' være:

$$\frac{v''^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_1 - p'_1}{g\varrho}$$

Kontinuitetsligningen for udløbstversnittet f' vil saaledes være, naar m' er kontraktionskoefficienten ved udløbet af røret:

$$F.v = m'f'v'' = m'f' \sqrt{v^2 + 2\frac{(p_1 - p'_1)}{\varrho}}$$

hvoraf følger:

$$p_1 = p'_1 + \frac{v^2 \varrho (F^2 - m'^2 f'^2)}{2m'^2 f'^2} = p'_1 + v^2 E,$$

idet $\frac{\varrho (F^2 - m'^2 f'^2)}{2m'^2 f'^2}$ sættes $= E$.

Til bestemmelse af bevægelsen har man saaledes ligningerne:

(1) $$v^2 = (p_r - p_0)\,G$$

(2) $$\frac{p_0 - p_1}{g\varrho} + L \sin\alpha = \frac{O}{F}\, a v L + \frac{O}{F}\, b v^2 L$$

(3) $$p_1 = p'_1 + v^2 E$$

hvor

$$G = \frac{m f_2}{\varrho F^2}$$

$$E = \frac{\varrho\,(F^2 - m'^2 f'^2)}{2 m'^2 f'^2}$$

Sættes nu fremdeles:

$$g\varrho L \sin\alpha = N$$

$$g\varrho \frac{O}{F}\, a L = M$$

$$g\varrho \frac{O}{F}\, b L = P$$

faar ligningen (2) formen:

(2′) $$p_0 - p_1 + N = M v + P v^2.$$

Af ligningerne (1), (2′) og (3) bestemmes opgaven. Indsættes ligning (3): $p_1 = p'_1 + v^2 E$ i ligning (2), faar man:

(4) $$p_0 - p'_1 + N = M v + (P + E)\, v^2$$

$$p_0 = p'_1 - N + M v + (P + E)\, v^2$$

Indsættes denne værdi af p_0 i ligning (1), faar man:

$$v^2 = p_r G - p'_1 G + N G - M g\, v - (P + E)\, G\, v^2$$

$$v^2 (1 + (P + E)\, G) + v\, M G = (p_r - p'_1)\, G + N G$$

Af denne ligning findes v. Dividerer man hele ligningen med $G g\varrho$ og sætter $\frac{p_r - p'_1}{g\varrho} + \frac{N}{g\varrho}$, der er hele den givne trykhøide, da nemlig $\frac{N}{g\varrho} = L \sin\alpha$, lig H, faar man:

$$H = \frac{p_r - p'_1 + N}{g\varrho} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{2}{G\varrho} + \frac{2\,(P + E)}{\varrho}\right) + v\,\frac{M}{g\varrho}$$

Er friktionen proportional med 2den potens af hastigheden, er altsaa $a = 0$ og følgelig ogsaa $M = 0$, faar man:

$$H = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{2}{G\varrho} + \frac{2\,(P + E)}{\varrho}\right) =$$

$$= \frac{v^2}{2g}\left(\frac{2 F^2}{m f^2} + 2g\,\frac{O}{F}\, bL + \frac{F^2 - m'^2 f'^2}{m'^2 f'^2}\right)$$

Indsætter man ifølge ligning (1):

$$v^2 = (p_r - p_0)\,G$$

$$v = \sqrt{(p_r - p_0)G}$$

i ligning (4), faar man:

$$p_0 - p'_1 + N = M\sqrt{(p_r - p_0)G} + (P + E)(p_r - p_0)\,G$$

$$p_0\,(1 + (P + E)\,G) - p'_1 + N - (P + E)\,G\,p_r = M\sqrt{(p_r - p_0)\,G}$$

$$p_0^2\,(1 + (P + E)G)^2 - 2p_0\,(1 + (P + E)G)(p'_1 - N + (P + E)G\,p_r)$$
$$+ (p'_1 - N + (P + E)\,G\,p_r)^2 = M^2\,(p_r - p_0)\,G,$$

af hvilken ligning p_0 findes. Er $a = 0$, saa er $M = 0$ og

$$p_0 = \frac{p'_1 - N + (P + E)\,G\,p_r}{1 + (P + E)\,G}$$

Paa samme maade findes en ligning, hvoraf trykket p_1 ved slutten af røret bestemmes.

Sættes friktionen proportional med 2den potens af hastigheden, blir v, p_0 og p_1 bestemt af ligningerne:

$$v^2 = (p_r - p_0)\,G = \frac{p_0 - p_1 + N}{P} = \frac{p_1 - p'_1}{E}$$

Vi har ved den foregaaende udvikling antaget, at hastigheden overalt i et og samme tversnit af røret er konstant. Dette er i virkeligheden, som tidligere bemærket, ikke tilfældet. Hastigheden voxer fra rørets omkreds mod dets axe. Loven, hvorefter denne forandring af hastigheden i et og samme tversnit foregaar, findes paa følgende maade.

Vi vil betragte et rør med cirkelformet tversnit, hvis radius er R. I afstanden r fra rørets axe betegnes trykket med p_r og hastigheden med v_r. Trykket i reservoiret betegnes med P. Som udtryk for hastigheden ved overgangen fra reservoiret til røret har vi fundet udtrykket:

$$\frac{v_r^2}{2g} = \frac{P - p_r}{g\varrho}\,\frac{m}{2}\,\frac{f^2}{F^2} = \frac{P - p_r}{g\varrho}\,G.$$

Vi antager nu, at hastigheden i et uendelig tyndt skikt, i afstanden r fra axen, $2\pi r\,dr$ overalt er den samme, nemlig v_r. Dersom nu $\frac{m}{2}\frac{f^2}{F_2}$ er konstant lig G for enhver værdi af r, saa faar man ved at differentiere ovenstaaende ligning:

$$v_r\,dv_r = -\frac{G}{\varrho}\,dp_r.$$

$$dp_r = -\frac{1}{G}\,v_r\,\varrho\,dv_r.$$

Betegnes et element af rørets længde med dl, saa blir den flade, hvorpaa trykket dp_r virker, lig $2\pi r\,dl$, og den virkende kraft:

$$2\pi r\,dl\,dp_r = -2\pi r\,dl\,\frac{1}{G}\,v_r\,\varrho\,dv_r.$$

Den masse, som sættes i bevægelse af denne kraft, er $2\pi r\,dl\,dr\,\varrho$. Følgelig blir accelerationen a, der er konstant

$$a = -\frac{2\pi r\,\frac{1}{G}\,v_r\,\rho\,dl\,dv_r}{2\pi r\,\varrho\,dl\,dr} = -\frac{1}{G}\,\frac{v_r\,dv_r}{dr}.$$

$$\frac{1}{G}\,v_r\,dv_r = -a\,dr.$$

$$\frac{1}{2G}\,v_r^2 = -ar + K.$$

Nu er $v_r = 0$, naar $r = R$, følgelig:

$$0 = -aR + K$$

$$K = aR.$$

Følgelig:

$$v_r^2 = a\,G\,(R - r).$$

Fremdeles er $v_r = V =$ maximumshastigheden, naar $r = 0$; altsaa:

$$V^2 = a\,G\,R;\quad a = \frac{V^2}{GR};$$

$$v_r^2 = V^2\,\frac{(R-r)}{R};\quad V^2 - v_r^2 = a\,Gr = \frac{V^2}{R}\,r.$$

Den midlere udløbshastighed c erholdes ved at dividere det i tidsenheden udstrømmende volum med udløbstversnittet. Man faar:

$$c\,\pi\,R^2 = \int_0^R v\,2\pi r\,dr = \int_0^R \frac{V}{R^{1}/_{2}}\,(R-r)^{\frac{1}{2}}\,2\pi r\,dr =$$

$$= \frac{8}{15}\,\pi\,R^{\frac{5}{2}}\,\frac{V}{R^{1}/_{2}} = \frac{8}{15}\,\pi\,R^2\,V$$

$$c = \frac{8}{15}\,V$$

Indsættes $c = \frac{8}{15}V$, faaes:

$$v_r^2 = V^2\,\frac{(R-r)}{R} = \left(\frac{15}{8}\,c\right)^2\left(\frac{R-r}{R}\right) = 3,5\,c^2\left(\frac{R-r}{R}\right)$$

Trykket p_r i afstanden r fra axen ved rørets begyndelse findes af formlen:

$$v_r^2 = \frac{2\,(P - p_r)}{\varrho}\,G,\ \text{hvoraf følger:}$$

$$p_r = P - \frac{1}{2G}\,v_r^2\,\varrho$$

$$p_r = P - \frac{1}{2G}\,3,5\,c^2\left(\frac{R-r}{R}\right)\varrho.$$

Dersom kontraktionskoefficienten m for udløbet fra reservoiret ikke er lig 1, kan man strengt taget ikke antage $G = \frac{m}{2} \frac{f^2}{F^2}$ for konstant, idet nemlig kontraktionskoefficienten m i dette tilfælde ikke kan antages at være den samme i alle afstande r fra tversnittets centrum. Man maa nemlig antage, at kontraktionskoefficienten ved tversnittets centrum, naar $r = 0$, altid er lig 1, medens den, naar den midlere kontraktionskoefficient ved udløbet er mindre end 1, maa aftage henimod tversnittets omkreds, hvor den har sin mindste værdi. Kontraktionskoefficienten m vil da aftage med voxende r.

Friktionsmodstanden ved luftformige legemers bovægelse.

Til bestemmelse af friktionstabet ved luftformige legemers bevægelse i rørledninger har man to formler. Ved den ene, hvor trykforskjellen antages liden, sætter man tætheden og temperaturen konstant. Ved den anden, der skal gjælde ogsaa for store trykdifferentser, sætter man temperaturen konstant. Er forskjellen i tryk ved rørets begyndelse og ende meget liden, vil ogsaa forskjellen i tæthed og temperatur være liden, og man kan som tilnærmelse sætte denne ud af betragtning. Den anden formel, som gjælder for store trykdifferentser, er derimod feilagtig. Man kan for det første ikke uden videre antage temperaturen for konstant. Men selv om denne feil ikke var tilstede — vi vil senere se, at temperaturen i virkeligheden tilnærmelsesvis er konstant — er formlen ogsaa af andre grunde feilagtig. Vi vil kalde rørets længde L, hastigheden ved rørets begyndelse u_0, og hastigheden i et vilkaarligt tversnit u; ved rørets begyndelse er tætheden ϱ_0 og trykket p_0, i et vilkaarligt tversnit af røret er tætheden ϱ og trykket p; trykket ved rørets ende er p_1 og hastigheden u_1. Røret antages at have et konstant tversnit F og omkreds O. Røret antages at have en konstant heldning, med heldningsvinkel α. Betragter man et tversnit i afstanden l fra rørets begyndelse, saa er den almindelige ligning for tilvexten af levende kraft ved bevægelsen gjennem baneelementet dl

$$d\left(\frac{u^2}{2g}\right) = dh - \frac{dp}{g\varrho} - \frac{O}{F}(au + bu^2)\,dl$$

Sættes nu $dh = \sin\alpha\, dl$ og $g\varrho = \frac{1}{v}$, faar man ligningen:

$$d\left(\frac{u^2}{2g}\right) = \sin\alpha\, dl - V\, dp - \frac{O}{F}(au + bu^2)\, dl.$$

Ved behandlingen af denne ligning kan man ikke, idet man bestemmer u og v som funktioner af p, uden videre antage, at temperaturen er konstant. Ved friktionen opvarmes gasen, men ikke netop saa meget, at temperaturen blir konstant.

For at bestemme loven, hvorefter ϱ og den deraf afhængige u forandres med p, altsaa tilstandsligningen for expansionen af den gjennem røret strømmende gas, maa man kjende loven for varmetilførselen under expansionen. Betragter man et tversnit i afstanden l fra rørets begyndelse, hvor tætheden er ϱ, trykket p og hastigheden u, saa vil disse størrelser i afstanden $l + dl$ være forandret til $\varrho + d\varrho$; $p + dp$ og $u + du$. Der foregaar da gjennem tversnittet l en udstrømning, hvor overtrykket — det effektive tryk — er $p - (p + dp) = - dp$, og hastigheden $du = \sqrt{\frac{-2\,dp}{\varrho}}$

Nu har vi før fundet, at arbeidsevnen ven udløb er en sum af 2 led; det ene led Ar er frembragt ved accelerationsarbeidet af overtrykket, idet tætheden af den udstrømmende gas er konstant lig den indre tæthed, og det andet led E er en virkning af expansionsarbeidet, idet den indre tæthed forandres til den værdi, der svarer til et ligevægtstryk lig det ydre modtryk. Af de to led, hvoraf arbeidsevnen bestaar, vil nu ved udløb gjennem tversnittet i afstanden l fra rørets begyndelse til tversnittet i afstanden $l + dl$, det ene led, nemlig det, der er en virkning af accelerationsarbeidet af overtrykket, opveies ved friktionsmodstandens arbeide og omdannes til varme. Det andet led, der er en virkning af expansionen, vil derimod ikke formindskes paa grund af friktionen, men tvertimod forhøies, idet der under expansionen vil tilføres varme, ved at accelerationsarbeidet Ar er omdannet til varme. Som formel for accelerationsarbeidet fandt vi:

$$A_r = \frac{D\, v_0}{2m\left(\frac{kp_0 - (2m\,k - 1)\,D}{kp_1 + D}\right)^{\frac{1}{2k}}},$$

hvor D er overtrykket ved mundingen.

Ved udløb gjennem et vilkaarligt tversnit i røret blir $D = - dp$; $p_0 = p$; $p_1 = p + dp$; $v_0 = v$ og $m = 1$. Følgelig blir

$$A = \frac{-dp\, v}{2m\left(\frac{kp + (2k - 1)\,dp}{kp + k\,dp - dp}\right)^{\frac{1}{2k}}} = \frac{-v\,dp}{2m}$$

Den tilførte varmemængde under expansionen blir saaledes:

$$dQ_v = -\frac{1}{2m} A\, v\, dp$$

Tilstandsligningen for gasen under expansionen i røret findes derfor af ligningerne:

$$dQ_v = -h\, v\, dp = A p\, dv + c_v\, dT$$

og den almindelige tilstandligning:

$$pv = RT.$$

Af den første ligning faaes:

$$dT = -\frac{hv\, dp + Ap\, dv}{c_v}$$

Ved at differentiere ligningen $pv = RT$ og indsætte værdien af dT, faaes:

$$p\, dv + v\, dp = -\frac{hR}{c_v} v\, dp - \frac{AR}{c_v} p\, dv$$

$$\frac{dv}{\left(1 + \frac{hR}{c_v}\right) v} = -\frac{dp}{\left(\frac{1 + AR}{c_v}\right) p} = -\frac{dp}{kp}$$

$$\log \operatorname{nat} v^{\frac{k}{1 + \frac{hR}{c_v}}} = -\log \operatorname{nat} p + K$$

$$p\, v^{\frac{k}{1 + \frac{hR}{c_v}}} = p_0\, v_0^{\frac{k}{1 + \frac{hR}{c_v}}}$$

Dette er tilstandsligningen for expansionen af gasen i røret. Betingelsen for, at temperaturen skal være konstant, blir:

$$1 + \frac{hR}{c_v} = k, \text{ hvoraf } hR = (k - 1)\, c_v$$

Da $h = \frac{1}{2m} A = \frac{1}{2} A$, idet nemlig $m = 1$, blir følgelig tilstandsligningen:

$$p\, v^{\frac{c_v k}{c_v + \frac{1}{2} AR}} = p\, v^{\frac{c_v k}{c_v + \frac{1}{2}(c_p - c_v)}} =$$

$$= p\, v^{\frac{c_v k}{\frac{1}{2}(c_v + c_p)}} = p\, v^{\frac{2k}{k+1}} = p_0\, v_0^{\frac{2k}{k+1}}$$

Dette er tilstandsligningen ved expansionen af gasen i røret. Betingelsen for, at temperaturen skal være konstant, er at: $k + 1 = 2k$; altsaa at $k = 1$. Da $k = 1{,}41$ ved permanente gaser,

ser man saaledes, at temperaturen ikke kan blive konstant ved permanente gaser. Da imidlertid $\frac{2k}{k+1} = \frac{28}{24}$, nærmer temperaturen sig til at være konstant.

Benyttelsen af en urigtig tilstandsligning ved bestemmelsen af u og v er ikke den største feil, som man gjør sig skyldig i ved anvendelsen af ligningen om tilvexten af levende kraft. Der er en feil af langt større betydning. Sagen er, at man benytter ligningen:

$$d\left(\frac{u^2}{2g}\right) = \sin\alpha\, dl - v\, dp - \frac{O}{F}(au + bu^2)\, dl$$

paa en urigtig maade. I udtrykket for friktionsmodstanden $\frac{O}{F}(au + bu^2)\, dl$ maa u i tidselementet dt betragtes som konstant. Men betragtes u som konstant, maa $d\left(\frac{u^2}{2g}\right) = 0$. Ligningen blir følgelig:

$$\sin\alpha\, dl - v\, dp - \frac{O}{F}(au + bu^2)\, dl = 0.$$

Hastigheden ved bevægelsen gjennem et baneelement dl maa betragtes som konstant, og ligesaa tætheden; derimod blir hastigheden og tætheden i det efterfølgende baneelement forskjellig fra hastigheden og tætheden i det foregaaende.

Man faar derfor ligningen:

$$dp = \left(\sin\alpha - \frac{O}{F}(au + bu^2)\right)\frac{1}{v}\, dl.$$

Værdien af v bestemmes af den forhen fundne tilstandsligning:

$$p v^{\frac{2k}{k+1}} = p_0 v_0^{\frac{2k}{k+1}},$$

hvoraf findes:

$$v = v_0 \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{k+1}{2k}}; \quad \varrho = \varrho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{2k}}$$

Fremdeles er paa grund af kontinuiteten: $u\varrho = u_0 \varrho_0$; og da $\varrho = \frac{1}{gv}$ og $\varrho_0 = \frac{1}{g v_0}$, blir $\frac{u}{v} = \frac{u_0}{v_0}$; følgelig

$$u = \frac{u_0}{v_0} v = u_0 \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{k+1}{2k}}$$

Indsættes dette, faaes:

$$(1)\; dp = \left(\frac{\sin\alpha}{v_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{2k}} - \frac{O}{F}\left(\frac{a u_0}{v_0} + \frac{b u_0^2}{v_0}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{k+1}{2k}}\right)\right) dl.$$

Sætter man nu:

$$\frac{\sin\alpha}{v_0\, p_0^{\frac{k+1}{2k}}} = A;\quad \frac{O}{F}\frac{a u_0}{v_0} = B;$$

$$\frac{O}{F}\frac{b u_0^2\, p_0^{\frac{k+1}{2k}}}{v_0} = C,$$

faar man:

$$\text{(2)}\qquad dp = \left(A\, p^{\frac{k+1}{2k}} - B - \frac{C}{p^{\frac{k+1}{2k}}} \right) dl.$$

Denne ligning kan integreres. Indsætter man værdien af $k = 1{,}4$ for permanente gaser, blir $\frac{k+1}{2k} = \frac{6}{7}$, og man faar:

$$dp = \left(A\, p^{\frac{6}{7}} - B - \frac{C}{p^{\frac{6}{7}}} \right) dl$$

$$p^{\frac{6}{7}}\, dp = \left(A\, p^{\frac{12}{7}} - B\, p^{\frac{6}{7}} - C \right) dl.$$

Sættes $p^{\frac{1}{7}} = z$, altsaa $p = z^7$, blir $dp = 7z^6\, dz$ og

$$7z^7\, dz = (Az^{12} - Bz^6 - C)\, dl$$

$$\frac{7z^7\, dz}{Az^{12} - Bz^6 - C} = dl.$$

Det brudne differential kan integreres ved at opløse brøkfunktionen i sine faktorer. Det erholdte resultat egner sig dog ikke til at benyttes ved beregninger. Man maa derfor nøie sig med tilnærmede resultater, naar ikke A og B er lig 0. Er derimod A og B lig 0, faar man:

$$p^{\frac{k+1}{2k}}\, dp = -C\, dl$$

$$\text{(3)}\qquad \frac{2k}{3k+1}\, p^{\frac{3k+1}{2k}} = -Cl + K.$$

Naar $p = p_0$, er $l = 0$, følgelig:

$$\frac{2k}{3k+1}\, p_0^{\frac{3k+1}{2k}} = K.$$

Naar $p = p_1$, er $l = L$, følgelig:

$$\text{(4)}\qquad \frac{2k}{3k+1}\, p_1^{\frac{3k+1}{2k}} = -CL + \frac{2k}{3k+1}\, p_0^{\frac{3k+1}{2k}}$$

Indsætter man heri værdien af $C = \frac{\frac{O}{F} b\, p_o^{\frac{k+}{2k}} u_0^2}{v_o}$, faar man

$$\frac{2k}{3k+1}\left(p_0^{\frac{3k+1}{2k}} - p_1^{\frac{3k+1}{2k}}\right) = \frac{\frac{O}{F} b\, L\, p_o^{\frac{k+1}{2k}} u_0^2}{v_o},$$

$$(5) \qquad u_0^2 = \frac{\frac{2k}{3k+1}\left(p_o^{\frac{3k+1}{2k}} - p_1^{\frac{3k+1}{2k}}\right) v_o}{\frac{O}{F} b\, L\, p_o^{\frac{k+1}{2k}}}$$

Denne formel gir hastigheden under den forudsætning, at man har et horizontalt rør, og at friktionen kan sættes proportional med hastighedens kvadrat.

Af ligning (4) følger:

$$C = \frac{2k}{3k+1}\left(p_o^{\frac{3k+1}{2k}} - p_1^{\frac{3k+1}{2k}}\right)\frac{1}{L}$$

Indsættes dette i ligning (3), faar man:

$$(6) \quad p^{\frac{3k+1}{2k}} = p_o^{\frac{3k+1}{2k}} \div \left(p_o^{\frac{3k+1}{2k}} - p_1^{\frac{3k+1}{2k}}\right)\frac{l}{L},$$

af hvilken ligning trykket paa ethvert punkt af ledningen bestemmes.

Er ikke røret horizontalt, og sættes ikke friktionen proportional blot med 2den potens af hastigheden, maa man ved integrationen af ligning (2) nøie sig med tilnærmende værdier. Man kan til hjælp ved integrationen benytte den fundne relation (6) mellem p og l. Differentieres ligning (6), faar man:

$$\frac{3k+1}{2k} p^{\frac{k+1}{2k}} dp = -\frac{\left(p_o^{\frac{3k+1}{2k}} - p_1^{\frac{3k+1}{2k}}\right) dl}{L}$$

$$dl = -\frac{(3k+1) L\, p^{\frac{k+1}{2k}} dp}{2k\left(p_o^{\frac{3k+1}{2k}} - p_1^{\frac{3k+1}{2k}}\right)}$$

Indsættes denne værdi af dl i ligning (2), faar man:

$$dp = -\left(Ap^{\frac{k+1}{2k}} - B - \frac{C}{p^{\frac{k+1}{2k}}}\right)^{\frac{3k+1}{2k}} \times$$

$$\times \frac{Lp^{\frac{k+1}{2k}}}{(p_0^{\frac{3k+1}{2k}} - p_1^{\frac{3k+1}{2k}})} \frac{dp}{\left.\right)}$$

Ved integration faaes:

$$\left(C - \frac{2k}{3k+1} \frac{\left(p_0^{\frac{3k+1}{2k}} - p_1^{\frac{3k+1}{2k}}\right)}{L}\right) p =$$

$$= \frac{k}{2k+1} A p^{\frac{2k+1}{k}} - \frac{2k}{3k+1} B p^{\frac{3k+1}{2k}} + K.$$

Gives p værdien p_0, elimineres konstanten K, og man faar:

$$\left(C - \frac{2k}{3k+1} \frac{\left(p_0^{\frac{3k+1}{2k}} - p_1^{\frac{3k+1}{2k}}\right)}{L}\right)(p_0 - p) =$$

$$= \frac{k}{2k+1} A \left(p_0^{\frac{2k+1}{k}} - p^{\frac{2k+1}{k}}\right) -$$

$$- \frac{2k}{3k+1} B \left(p_0^{\frac{3k+1}{2k}} - p^{\frac{3k+1}{2k}}\right)$$

Indsætter man nu;

$$C = \frac{O}{F} \frac{b\, p_0^{\frac{k+1}{2k}} u_0^2}{v_0}; \quad A = \frac{\sin \alpha}{v_0\, p_0^{\frac{k+1}{2k}}}; \quad B = \frac{O}{F} \frac{a\, u_0}{v_0}$$

faar man, naar man sætter $p = p_1$:

$$(7)\quad \frac{O}{F}\,\frac{b\,p_0^{\frac{k+1}{2k}}\,u_0^2}{v_0}(p_0 - p_1) + \frac{2k}{3k+1}\,\frac{O}{F}\,\frac{a}{v_0}\,u_0\left(p_0^{\frac{3k+1}{2k}} - p_1^{\frac{3k+1}{2k}}\right) =$$

$$= \frac{k}{2k+1}\,\frac{\sin\alpha}{v_0\,p_0^{\frac{k+1}{2k}}}\left(p_0^{\frac{2k+1}{k}} - p_1^{\frac{2k+1}{k}}\right) +$$

$$+ \frac{2k}{3k+1}(p_0 - p_1)\,\frac{\left(p_0^{\frac{3k+1}{2k}} - p_1^{\frac{3k+1}{2k}}\right)}{L}$$

Af ligning (7) bestemmes u_0 ved løsning af en ligning af 2den grad, naar p_0 og p_1 er bekjendte. Er A og B lig 0, faar man den tidligere fundne ligning (5).

Relationen mellem p og l, der indeholdes i ligning (6), er udledet under den forudsætning, at friktionen er proportional med 2den potens af hastigheden. Denne forudsætning er mindre rigtig, og den fundne relation mellem p og l er derfor heller ikke ganske nøiagtig, Ved en anden betragtning vil man ogsaa kunne udlede en relation mellem p og l. I afstanden l fra rørets begyndelse vil der foregaa en udstrømning med overtrykket — dp, idet modtrykket er trykket p + dp i afstanden l + dl. Det specifike tryk ved udstrømningen blir derfor p + 2dp. Men dette tryk p + 2dp vil ikke være trykket i afstanden l + 2dl, idet nemlig gasen expanderer under udstrømningen. Trykket p + 2dp vil man paa grund af expansionen først finde i afstanden l + dl + dl', hvor dl' er større end dl. Expansionen foregaar efter tilstandsligningen: $p\,v^{\frac{2k}{k+1}} = \text{konstant}$. Kaldes det specifike volum efter expansionen v' faar man altsaa ligningen:

$$(p + dp)\,v'^{\frac{2k}{k+1}} = p\,v^{\frac{2k}{k+1}}$$

Hvis man istedetfor den nøiagtige tilstandsligning sætter tilstandsligningen $(p + dp)\,v' = p\,v$, altsaa antager temperaturen for konstant, faar man:

$$p\,(v' - v) = p\,(dl' - dl) = -\,v'\,dp = (v + dv)\,dp = v\,dp.$$

Her er dl længden af baneelémentet, der svarer til en forandring af trykket, lig dp, under den forudsætning, at tætheden er konstant. Følgelig er $dl = c dp$, hvor c er en konstant. Man faar saaledes:

$$p dl' = p dl - v dp = c p dp - p_o v_o \frac{dp}{p}$$

$$dl' = c dp - p_o v_o \frac{dp}{p_2}$$

$$l = cp - \frac{\frac{1}{3} p_o v_o}{p^3} + K.$$

Nu er $l = o$, naar $p = p_o$, følgelig blir:

$$l = c(p - p_o) - \frac{1}{3} p_o v_o \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{p_o^3}\right)$$

Da $\frac{1}{p^3} - \frac{1}{p_o^3}$ er en meget liden størrelse, vil med stor tilnærmelse relationen mellem p og l, naar temperaturen antages for konstant, udtrykkes ved samme ligning som ved vædsker, hvor ϱ er konstant, nemlig ved

$$l = c(p - p_o), \text{ hvoraf}$$

$$p = p_o - (p_o - p_1) \frac{l}{L}.$$

Da der, naar gasen under expansionen ikke tilføres saa megen varme, at dens temperatur er konstant, til en given forandring af trykket svarer en mindre forandring af det specifike volum, end naar temperaturen er konstant under expansionen, vil følgelig forskjellen mellem dl' og dl blive mindre og ovenstaaende ligning $p = p_o - (p_o - p_1) \frac{l}{L}$ med stor tilnærmelse udtrykke relationen mellem p og l.

Denne relation vil man derfor kunne benytte til bestemmelse af trykket i ledningen og ligeledes ved integrationen af ligning (2).

Indsætter man i ligning (2) $dl = c dp = \frac{L}{p_1 - p_o} dp$, faar man:

$$p^{\frac{k+1}{2k}} dp = \left(A c p^{\frac{k+1}{k}} - B c p^{\frac{k+1}{2k}} - Cc\right) dp$$

Ved integration:

$$\frac{2k}{3k+1} p^{\frac{3k+1}{2k}} = \frac{k}{2k+1} A c p^{\frac{2k+1}{k}} - \frac{2k}{3k+1} c B p^{\frac{3k+1}{2k}} - Ccp + K$$

$$\frac{2k}{3k+1}\left(p_1^{\frac{3k+1}{2k}} - p_0^{\frac{3k+1}{2k}}\right) = \frac{k}{2k+1} cA \left(p_1^{\frac{2k+1}{k}} - p_0^{\frac{2k+1}{k}}\right) -$$

$$- \frac{2k}{3k+1} cB \left(p_1^{\frac{3k+1}{2k}} - p_0^{\frac{3k+1}{2k}}\right) - Cc\,(p_1 - p_0)$$

Indsættes heri værdierne af A, B, C og c, faar man en ligning, som er identisk med ligning (7).

Man kan ogsaa finde en tilnærmet værdi af integralet af ligning (1) paa en anden maade. Da $k + 1 = 2k - (k - 1)$, kan ligning (1) skrives saaledes:

$$dp = \left(\frac{\sin\alpha}{v_0}\frac{p}{p_0}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{(k-1)}{2k}} - \frac{O}{F}\left(\frac{au_0}{v_0} + \frac{bu_0^2}{v_0}\frac{p_0}{p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{(k-1)}{2k}}\right)\right) dl.$$

Nu er for permanente gaser $\frac{k-1}{2k} = \frac{1{,}4 - 1}{2{,}8} = \frac{1}{7}$. Man faar saaledes for permanente gaser $\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{(k-1)}{2k}} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{7}}$

Værdien af p vil under integrationen variere fra $p = p_0$ til $p = p_1$. Størrelsen af faktoren $\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{(k-1)}{2k}}$ vil saaledes variere fra 1 til $\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{7}}$. Værdien af $\int_{p_0}^{p^1} dp$ vil ligge mellem den værdi, integralet faar, naar man sætter $\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{(k-1)}{2k}} = 1$, og den værdi, integralet erholder, naar man sætter $\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{(k-1)}{2k}} = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{(k-1)}{2k}}$ Man erholder da værdien af integralet, naar man istedetfor $\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{(k-1)}{2k}}$ sætter en størrelse h, der ligger mellem grænserne

1 og $\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{(k-1)}{2k}}$. Som en rimelig tilnærmelse vil man kunne sætte h lig middeltallet mellem grænserne, altsaa

$$h = \frac{1 + \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{(k-1)}{2k}}}{2} = \frac{p_0^{\frac{(k-1)}{2k}} + p_1^{\frac{(k-1)}{2k}}}{2\, p_1^{\frac{(k-1)}{2k}}}$$

Indsættes $\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{(k-1)}{2k}} = h$, blir ligning (1):

$$dp = \left(\frac{\sin\alpha}{v_0} h \frac{p}{p_0} - \frac{O}{F}\left(\frac{au_0}{v_0} + \frac{bu_0^2}{v_0}\frac{1}{h}\frac{p_0}{p}\right)\right) dl$$

Multipliceres hele ligningen med p, faar man:

$$p\,dp = \left(\frac{h \sin\alpha}{v_0\, p_0} p^2 - \frac{O}{F}\left(\frac{au_0}{v_0} p + \frac{b\, u_0^2\, p_0}{h\, v_0}\right)\right) dl$$

Sætter man nu:

$$\frac{h \sin\alpha}{v_0\, p_0} = A$$

$$\frac{O}{F}\, \frac{a\, u_0}{v_0} = B$$

$$\frac{O}{F}\, \frac{b\, u_0^2\, p_0}{h\, v_0} = C.$$

faar man:

(8) $$p\, dp = (A\, p^2 - B\, p - C)\, dl$$

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{p\, dp}{p^2 - \frac{B}{A} p - \frac{C}{A}} = \int_0^L A\, dl.$$

Hvis i denne ligning A = 0, altsaa $\alpha = 0$, faar man:

$$\frac{p\, dp}{B\, p + C} = -\, dl$$

$$\int_{p_0}^{p^1} \frac{p\, dp}{p + \frac{C}{B}} = \int_{p_0}^{p^1} \left(1 - \frac{\frac{C}{B}}{p + \frac{C}{B}}\right) dp = - \int_0^L B\, dl.$$

$$p - \frac{C}{B} \text{ lognat} \left(p + \frac{C}{B}\right) = - Bl + K$$

$$p_1 - p_0 - \frac{C}{B} \text{ lognat} \left(\frac{B\, p_1 + C}{B\, p_0 + C}\right) = - BL$$

$$\text{lognat} \left(\frac{B\, p_1 + C}{B\, p_0 + C}\right) = \left(BL - (p_0 - p_1)\right) \frac{B}{C}$$

$$\frac{B\, p_1 + C}{B\, p_0 + C} = e^{(BL - (p_0 - p_1)) \frac{B}{C}}$$

Da nu $BL \frac{B}{C} = \frac{O}{F} L \frac{a^2 h}{v_0\, p_0}$ og $(p_0 - p_1) \frac{B}{C} = \frac{a\, h\, (p_0 - p_1)}{b u_0\, p_0}$

vil følgelig $\left(BL - (p_0 - p_1)\right) \frac{B}{C}$ i almindelighed være en liden størrelse. Man vil da kunne udvikle exponentfunktionen i række og blot tage med 1ste potens i rækkeudviklingen. Man faar da:

$$\frac{B\, p_1 + C}{B\, p_0 + C} = 1 + \left(BL - (p_0 - p_1)\right) \frac{B}{C}$$

$$B\, p_1 = B\, p_0 + (B\, p_0 + C) \left(BL - (p_0 - p_1)\right) \frac{B}{C}$$

$$p_1 = p_0 + \left(\frac{B}{C}\, p_0 + 1\right) \left(BL - (p_0 - p_1)\right)$$

Indsættes nu $\frac{B}{C} = \frac{ah}{b u_0\, p_0}$; $B = \frac{O}{F} \frac{a u_0}{v_0}$, faar man:

$$p_1 = p_0 + \left(\frac{a\,h}{b u_0} + 1\right) \left(\frac{O}{F} L \frac{a u_0}{v_0} - (p_0 - p_1)\right)$$

$$p_1 = p_0 + \frac{O}{F} L \frac{a^2 h}{b v_0} + \frac{O}{F} L \frac{a u_0}{v_0} - \frac{a h (p_0 - p_1)}{b u_0} - (p_0 - p_1)$$

$$h\, (p_0 - p_1) = \frac{O}{F} L \left(\frac{a h\, u_0}{v_0} + \frac{b u_0^2}{v_0}\right) \tag{9}$$

Denne ligning gir u_0, naar $\alpha = 0$, og friktionen sættes proportional med $au + bu^2$.

Hvis i ligning (8) $B = 0$, hvis altsaa friktionen antages proportional med 2den potens af hastigheden, faar man:

$$\frac{2 p\, dp}{p^2 - \frac{C}{A}} = 2\, A\, dl.$$

$$\text{lognat} \left(p^2 - \frac{C}{A}\right) = 2\, A\, l + K$$

$$\text{lognat}\left(\frac{A\,p_1^2 - C}{A\,p_0^2 - C}\right) = 2\,AL$$

$$\frac{A\,p_1^2 - C}{A\,p_0^2 - C} = e^{2\,AL}$$

Er $2\,AL = \frac{2\,hL \sin\alpha}{v_0\,p_0}$ liden, kan exponentfunktionen udvikles i række, hvor blot 1ste potens medtages. Man faar da:

$$\frac{A\,p_1^2 - C}{A\,p_0^2 - C} = 1 + 2\,AL$$

$$A\,p_1^2 = A\,p_0^2 + 2\,AL\,(A\,p_0^2 - C)$$

$$p_1^2 = p_0^2 + 2L\,(A\,p_0^2 - C) = p_0^2 + 2L\left(\frac{h \sin\alpha\,p_0}{v_0} - \frac{O}{F}\,\frac{b u_0^2\,p_0}{h\,v_0}\right)$$

(10) $$u_0^2 = \frac{1}{2}\,\frac{(p_0^2 - p_1^2)}{\frac{O}{F}\,b\,L\,p_0}\,h\,v_0 + \frac{h^2 \sin\alpha}{b\,\frac{O}{F}}$$

Vi skal dernæst betragte det tilfælde, at forskjellen mellem p_0 og p_1 er meget liden. Ledningsrøret antages at være horizontalt og friktionen sættes proportional med hastighedens kvadrat. Ligningen for u_0^2 er da ifølge ligning (5):

$$u_0^2 = \frac{2k}{3k+1}\,v_0\,\frac{\left(p_0^{\frac{3k+1}{2k}} - p_1^{\frac{3k+1}{2k}}\right)}{\frac{O}{F}\,b\,L\,p_0^{\frac{k+1}{2k}}}$$

Nu er $p_0^{\frac{3k+1}{2k}} = (p_1 + (p_0 - p_1))^{\frac{3k+1}{2k}} = p_1^{\frac{3k+1}{2k}} +$

$$+ \left(\frac{3k+1}{2k}\right) p_1^{\frac{k+1}{2k}}\,(p_0 - p_1) + \ldots.$$

Følgelig blir tilnærmet:

$$p_0^{\frac{3k+1}{2k}} - p_1^{\frac{3k+1}{2k}} = \frac{3k+1}{2k}\,p_1^{\frac{k+1}{2k}}\,(p_0 - p_1)$$

og

$$u_o^2 = \frac{v_o\, p_1^{\frac{k+1}{2k}} (p_o - p_1)}{\frac{O}{F}\, b\, L\, p_o^{\frac{k+1}{2k}}}$$

Vi kan her fremdeles som tilnærmelse sætte $\left(\frac{p_1}{p_o}\right)^{\frac{k+1}{2k}} = \frac{p_1}{p_o}$ og faar da:

$$(11) \qquad u_o^2 = \frac{v_o\, p_1 (p_o - p_1)}{\frac{O}{F}\, b\, L\, p_o}$$

Til bestemmelse af bevægelsen i ledningsrøret har vi saaledes en af ligningerne (5), (7), (9), (10) og (11), naar trykket ved rørets begyndelse p_o og dets ende p_1 er givne.

Naa u_o er fundet, erholdes hastigheden u_1 ved rørets munding af ligningen $u_1 = \frac{u_o}{v_o} v_1$ naar v_1 er det specifike volum ved trykket p_1. Man faar da $u_1 = u_o \left(\frac{p_o}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{2k}}$ og tætheden af den udstrømmende gas af ligningen $v_1 = \frac{1}{g\varrho_1} = v_o \left(\frac{p_o}{v_o}\right)^{\frac{k+1}{2k}} =$

$$= \frac{1}{g\varrho_o} \left(\frac{p_o}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{2k}}$$

Heraf faar man:

$$\varrho_1 = \varrho_o \left(\frac{p_1}{p_o}\right)^{\frac{k+1}{2k}}$$

Temperaturen T_1 af gasen ved udløbet faar man af ligningen: $p_1\, v_1 = R T_1 = p_1\, v_o \left(\frac{p_o}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{2k}}$, hvoraf

$$T_1 = \frac{p_1\, v_o}{R} \left(\frac{p_o}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{2k}} = \frac{p_o\, v_o}{R} \left(\frac{p_1}{p_o}\right)^{\frac{k-1}{2k}} = T_o \left(\frac{p_1}{p_o}\right)^{\frac{k-1}{2k}}$$

Udløbsmængden er g F ϱ_o u_o og den levende kraft ved udløbet $\frac{1}{2}$ F ϱ_o u_o u_1^2 =

$$= \frac{1}{2} F \varrho_o u_o^3 \left(\frac{p_o}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}}$$

Tilvexten i levende kraft ved udløbet følgelig:

$$\frac{1}{2} F \varrho_o u_o^3 \left(\left(\frac{p_o}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}} - 1\right)$$

Det gjælder nu at bestemme trykket p_o ved ledningsrørets begyndelse, naar udløbet foregaar fra et reservoir gjennem ledningsrøret. Kaldes trykket i reservoiret p_r, tætheden ϱ_r, temperaturen T_r, tversnitet af reservoirets munding f og udløbshastigheden u_r, saa har man:

$$u_r = \sqrt{\frac{2D}{\varrho_r'}}$$

naar D er det effektive overtryk og ϱ'_r det specifike tryk af den udstrømmende gas. Udløbsmassen blir da, naar m er kontraktionskoefficienten: mf ϱ'_r u_r og paa grund af kontinuiteten faar man:

$$m f \varrho'_r u_r = F u_o \varrho_o.$$

Paa grund af stødet mod gasen i reservoiret vil ϱ'_r blive lig ϱ_r og det effektive overtryk $D = \frac{1}{2m} (p_r - p_o)$. Den effektive trykhøide blir nemlig her ligesom ved væsker $\frac{1}{2m}$ af den givne trykhøide. Man faar saaledes:

$$m f \varrho_r \sqrt{\frac{2(p_r - p_o)}{\varrho_r}} \sqrt{\frac{1}{2m}} = F u_o \varrho_o$$

Tætheden af den gas, som strømmer ud fra reservoiret er ϱ_r; efter udløbet expanderer den til tætheden ϱ_o. Under expansionen tilføres den varme, ved at arbeidsevnen, som er begrundet i den meddelte acceleration, formindskes. Arbeidsevnen paa grund af expansionen formindskes derimod ikke, idet expansionen foregaar lige godt. Tilstandsligningen for expansionen blir derfor den forhen fundne:

$$p_r v_r^{\frac{k}{1 + \frac{hR}{c_v}}} = p_o v_o^{\frac{k}{1 + \frac{hR}{c_v}}},$$

hvor $v_r = \frac{1}{g \varrho_r}$. Størrelsen af h afhænger af kontraktionskoefficienten m og af forholdet $\frac{f}{F}$. Naar al arbeidsevne, som er begrundet i den erholdte acceleration, omdannes til varme, er h som forhen paavist, lig $\frac{A}{2m}$, hvor $A = \frac{1}{424}$. Senere under afsnittet om tversnitsforandringer ved luftformige legemers bevægelse vises, at tabet i tryk paa grund af tversnitsforandringen er:

$$m\,u_r^2 \varrho_r \left(1 - \frac{mf}{F}\right),$$

og at $h = \frac{A}{2m}\left(1 - \frac{mf}{F}\right)$, naar man ikke kan sætte forholdet $\frac{mf}{F}$ ud af betragtning. Sætter man nu:

$$\frac{c_v\,k}{c_v + h\,R} = i,$$

saa blir tilstandsligningen for expansionen ved udløbet af reservoiret:

$$p_r\,v_r^{\,i} = p_0\,v_0^{\,i}$$

$$\varrho_0 = \varrho_r \left(\frac{p_0}{p_r}\right)^{\frac{1}{i}} = \varrho_r \frac{p_0}{p_r} \left(\frac{p_0}{p_r}\right)^{\frac{1}{i} - 1} = \varrho_r \frac{p_0}{p_r}\,n,$$

naar man for regningens skyld sætter:

$$\left(\frac{p_0}{p_r}\right)^{\frac{1}{i} - 1} = n.$$

Man faar saaledes:

$$\varrho_0^2 = \left(\frac{\varrho_r\,n\,p_0}{p_r}\right)^2$$

Kvadreres kontinuitetsligningen faar man:

$$m\,(f\,\varrho_r)^2\,\frac{(p_r - p_0)}{\varrho_r} = (F\,u_0\,\varrho_0)^2 = \left(F\,u_0\,\varrho\,n\,\frac{p_0}{p_r}\right)^2$$

Heraf faar man:

$$u_0^2 = \frac{m}{\varrho_r}\left(\frac{f\,p_r}{n\,F}\right)^2 \frac{(p_r - p_0)}{p_0^2} = G\,\frac{(p_r - p_0)}{p_0^2}, \tag{12}$$

idet man sætter:

$$\frac{m}{\varrho_r}\left(\frac{f\,p_r}{n\,F}\right)^2 = G.$$

Vi skal dernæst betragte udløbet af ledningsrørets munding. Hvis dennes tversnit f′ er mindre end ledningsrørets tversnit F, vil trykket ved rørets ende p_1 ikke være lig det ydre modtryk, som vi betegner med p'_1, men større end dette. Hastighedshøiden i udløbstversnittet f' vil da være en sum af hastighedshøiden for hastigheden u_1 i røret ved dettes ende og den trykhøide, som bestemmes af overtrykket $p_1 - p'_1$. Det tryk, som svarer til hastigheden u_1 i røret, er, naar tætheden betegnes med ϱ_1, lig $\frac{u_1^2}{2}\varrho_1$. Det samlede overtryk ved mundingen blir derfor:

$$\frac{u_1^2 \varrho_1}{2} + p_1 - p'_1.$$

For udløbsmassen har vi, naar m' er kontraktionskoefficienten, fundet formlen:

$$m' f' \sqrt{2D\varrho_0 \left(\frac{k p_0 - (2m'k - 1) D}{k p_1 + D}\right)^{\frac{1}{k}}},$$

hvor i det foreliggende tilfælde

$$D = \frac{u_1^2 \varrho_1}{2} + p_1 - p'_1$$

$$p_0 = \frac{u_1^2 \varrho_1}{2} + p_1$$

$$p_1 = p_1'$$

$$\varrho_0 = \varrho_1$$

Paa grund af kontinuiteten faar man saaledes ligningen:

$$m' f' \sqrt{2\left(\frac{u_1^2 \varrho_1}{2} + p_1 - p'_1\right)\varrho_1} \times$$

$$\times \sqrt{\left\{\frac{k\left(\frac{u_1^2 \varrho_1}{2} + p_1\right) - (2m'k - 1)\left(\frac{u_1^2 \varrho_1}{2} + p_1 - p'_1\right)}{k p'_1 + \frac{u_1^2 \varrho_1}{2} + p_1 - p'_1}\right\}^{\frac{1}{k}}} =$$

$$= F u_0 \varrho_0.$$

Sætter man her:

$$\sqrt{\left\{\frac{k\left(\frac{u_1^2 \varrho_1}{2} + p_1\right) - (2m'k - 1)\left(\frac{u_1^2 \varrho_1}{2} + p_1 - p'_1\right)}{k p'_1 + \frac{u_1^2 \varrho_1}{2} + p_1 - p'_1}\right\}^{\frac{1}{k}}} = r$$

faar man:

$$r m' f' \sqrt{2\left(\frac{u_1^2 \varrho_1}{2} + p_1 - p'_1\right)\varrho_1} = F u_0 \varrho_0.$$

Ved at kvadrere faar man:

$$(r\,m'\,f')^2\,2\left(\frac{u_1^2\,\varrho_1}{2} + (p_1 - p'_1)\,\varrho_1\right) = (F\,u_0\,\varrho_0)^2.$$

Nu er $(u_1\,\varrho_1)^2 = (u_0\,\varrho_0)^2$. Følgelig blir:

$$(r\,m'\,f'\,u_0\,\varrho_0)^2 + 2\,(r\,m'\,f')^2\,\varrho_1\,(p_1 - p'_1) = F\,u_0\,\varrho_0)^2$$

$$2\,(r\,m'\,f')^2\,\varrho_1\,(p_1 \div p'_1) = (u_0\,\varrho_0)^2\,(F^2 - (r\,m'\,f')^2)$$

$$p_1 = p'_1 + (u_0\,\varrho_0)^2\,\frac{F^2 - (r\,m'\,f')^2}{2\,(r\,m'\,f')^2\,\varrho_1}$$

Indsættes heri:

$$\varrho_0 = n\,\varrho_r\,\frac{p_0}{p_r}$$

$$\varrho_1 = n\,\varrho_r\,\frac{p_1}{p_r}$$

faar man:

$$p_1 = p'_1 + \left(u_0\,n\,\varrho_r\,\frac{p_0}{p_r}\right)^2\,\frac{F^2 - (r\,m'\,f')^2}{2\,(r\,m'\,f')^2\,\frac{p_1}{p_r}\,n\,\varrho_r}$$

$$p_1^2 - p_1\,p'_1 = u_0^2\,\frac{n\,\varrho_r}{p_r}\,p_0^2\,\frac{F^2 - (r\,m'\,f')^2}{2\,(r\,m'\,f')^2}$$

Sætter man nu:

$$\frac{n\,\varrho_r\,(F^2 - (r\,m'\,f')^2)}{2\,p_r\,(r\,m'\,f')^2} = E$$

faar man:

$$p_1^2 - p_1\,p'_1 = E\,(u_0\,p_0)^2$$

Da $p_1^2 - p_1\,p'_1 = p_1\,(p_1 - p'_1)$ og $p_1^2 - p'^2_1 = (p_1 - p'_1)\,(p_1 + p'_1)$ blir

$$\frac{p_1^2 - p'^2_1}{p_1^2 - p_1\,p'_1} = \frac{p_1 + p'_1}{p_1}$$

Forholdet vil altsaa ligge mellem 1, naar $p'_1 = 0$, og 2, naar $p'_1 = p_1$. Man kan derfor sætte:

$$p_1^2 - p'^2_1 = s\,(p_1^2 - p_1\,p'_1)$$

(13) $$p_1^2 = p'^2_1 + s\,E\,(u_0\,p_0)^2$$

hvor $s = \frac{p_1 + p'_1}{p_1}$ ligger mellem 1 og 2.

Til bestemmelse af u_0, p_0 og p_1 har vi saaledes ligningerne (12) og (13) samt en af ligningerne (5), (7), (9), (10) og (11). Af disse sidste skal vi anvende ligning (10). Denne er:

$$u_0^2 = \frac{1}{2}\,\frac{(p_0^2 - p_1^2)\,h\,v_0}{\frac{O}{F}\,b\,L\,p_0} + \frac{h^2\,\sin\alpha}{\frac{O}{F}\,b}$$

Indsættes i denne ligning $v_0 = v_r \left(\frac{p_r}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{2k}} = \frac{1}{n} v_r \frac{p_r}{p_0}$,
faar man:

$$u_0^2 = \frac{\frac{1}{2}(p_0^2 - p_1^2)\, h\, v_r\, p_r}{n\, \frac{O}{F}\, b\, L\, p_0^2} + \frac{h^2 \sin\alpha}{\frac{O}{F}\, b}$$

Man kan nu sætte:

$$\frac{h\, v_r\, p_r}{2n\, \frac{O}{F}\, b\, L} = M$$

$$\frac{h^2 \sin\alpha}{\frac{O}{F}\, b} = N$$

og faar da:

$$u_0^2 = \frac{M\,(p_0^2 - p_1^2)}{p_0^2} + N$$

Ligningerne (12) og (13) er:

$$u_0^2 = \frac{G\, p_r - p_0)}{p_0^2}$$

$$p_1^2 = p'^2_1 + s\, E\, (u_0\, p_0)^2$$

eller:

$$u_0^2 = \frac{p_1^2 - p'^2_1}{s\, E\, p_0^2}$$

Af disse 3 ligninger:

$$u_0^2 = \frac{M\,(p_0^2 - p_1^2)}{p_0^2} + N = \frac{G\,(p_r - p_0)}{p_0^2} = \frac{p_1^2 - p'^2_1}{s\, E\, p_0^2}$$

findes u_0, p_0 og p_1.
I disse ligninger er:

$$G = \frac{m\,(f\, p_r)^2}{(n\; F)^2\; \varrho_r}$$

$$E = \frac{n\, \varrho_r\, (F^2 - (r\, m'\, f')^2)}{2 p_r\, (r\, m'\, f')^2}$$

$$n = \left(\frac{p_0}{p_r}\right)^{\frac{1}{i} - 1}$$

$$r = \sqrt{\left\{\frac{k\left(\frac{u_1^2 \varrho_1}{2} + p_1\right) - (2m'k - 1)\left(\frac{u_1^2\, \varrho_1}{2} + p_1 - p'_1\right)}{k\, p'_1 + \frac{u_1^2\, \varrho_1}{2} + p_1 - p'_1}\right\}^{\frac{1}{k}}}$$

$$s = \frac{p_1 + p'_1}{p_1}$$

$$h = \frac{1 + \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\left(\frac{k-1}{2k}\right)}}{2}$$

Ved beregningen kan man først antage ϱ for konstant og faar da samme formler som ved væsker til bestemmelse af u_0, p_0 og p_1. Af disse værdier af u_0, p_0 og p_1 beregnes h, n, r og s, der ved indsætning i ligningerne:

$$u_0{}^2 = \frac{M\,(p_0{}^2 - p_1{}^2)}{p_0{}^2} + N = \frac{G\,(p\,r - p_0)}{p_0{}^2} = \frac{p_1{}^2 - p'_1{}^2}{s\,E\,p_0{}^2}$$

gir nøiagtigere værdier af u_0; p_0 og p_1. Af disse findes nøiagtigere værdier af h, n, r og s, hvoraf igjen nøiagtigere værdier af u_0, p_0 og p_1 beregnes.

Multipliceres ligningerne med $p_0{}^2$, faaes:

$$u_0{}^2\,p_0{}^2 = M\,(p_0{}^2 - p_1{}^2) + N\,p_0{}^2 = G\,(p\,r - p_0) = \frac{p_1{}^2 - p'_1{}^2}{s\,E}$$

Heraf faaes:

$$p_1{}^2 = p'_1{}^2 + s\,E\,G\,(p\,r - p_0) = p_0{}^2\left\{1 + \frac{N}{M}\right\} - \frac{G}{M}\,(p\,r - p_0)$$

$$p_0{}^2\left\{\frac{M+N}{M}\right\} + p_0\left\{\frac{G}{M} + s\,E\,G\right\} = p'_1{}^2 + \left\{\frac{G}{M} + s\,E\,G\right\}p\,r,$$

hvoraf p_0 bestemmes. Naar p_0 er fundet, erholdes p_1 og u_0 af ligningerne:

$$p_1{}^2 = s\,E\,G\,(p\,r - p_0) + p'_1{}^2$$

$$u_0{}^2 = \frac{G\,(p\,r - p_0)}{p_0{}^2}$$

Er $p_1 = p'_1$, blir $E = 0$, og man faar p_0 af ligningen:

$$p_0{}^2\,(M + N) + p_0\,G = M\,p_1{}^2 + G\,p\,r.$$

Temperaturen ved begyndelsen af ledningsrøret findes af formlen: $p_0\,v_0 = R\,T_0$, hvor $v_0 = v\,r\left\{\frac{p\,r}{p_0}\right\}^{\frac{1}{i}}$. Man faar heraf:

$$T_0 = \frac{p_0\,v_0}{R} = \frac{p_0\,v\,r}{R}\left\{\frac{p\,r}{p_0}\right\}^{\frac{1}{i}} = \frac{1}{n}\,T\,r.$$

Tversnitsforandringer ved luftformige legemers bevægelse.

Der er forhen udviklet en formel for trykhøidetabet ved tversnitsforandringer ved væsker. Jeg skal her lægge en noget anden betragtning til grund, hvorved ogsaa formlen blir noget forskjellig fra den forhen fundne. Jeg betragter som tidligere stødet af fluidet i forsnevringen mod fluidet i det udvidede tversnit som lodret stød mod et hvilende plan. Men medens det stødende fluidum ved lodret stød mod et fast plan efter stødet undviger i planets retning, altsaa i en retning, som er lodret paa stødretningen, og derfor, idet det forlader planet, ikke udøver noget reaktionstryk ligeoverfor dette, saa undviger i det her betragtede tilfælde det stødende fluidum i en retning, som er lodret paa det stødte plan, altsaa i stødretningen, og udøver derfor et reaktionstryk ligeoverfor det stødte plan. Vi vil kalde trykket i det første kar ved forsnevringens begyndelse p_0 og tætheden ϱ, der antages for konstant, trykket i det andet kar ved forsnevringens ende p_1. Tversnittet i forsnevringen er F_1 og tversnittet i det andet kar efter forsnevringen T_1; hastigheden i forsnevringen kaldes u_1 og kontraktionskeefficienten m_1. Hastigheden af fluidet i det andet kar, hvor tversnittet er T_1, kaldes U_1. Ved overgangen fra det første kar til det andet gjennem forsnevringen lides et tab i trykhøide lig $\frac{1}{2m_1}$. Hastigheden i forsnevringen u_1 blir saaledes bestemt af ligningen:

$$u_1^2 = \frac{2(p_0 - p_1)}{\varrho} \frac{1}{2m_1},$$

hvoraf

$$p_0 - p_1 = m_1 u_1^2 \varrho.$$

Dette vilde være størrelsen af tabet i tryk $(p_0 - p_1)$, hvis det stødende fluidum undveg i en retning, lodret stødretningen. Da det undviger i samme retning som stødretningen, opstaar et reaktionstryk, hvormed størrelsen af $(p_0 - p_1)$ formindskes. Størrelsen af dette reaktionstryk er $\frac{U_1^2}{2g} g\varrho$. Nu er paa grund af kontinuiteten:

$$m_1 F_1 u_1 \varrho = U_1 T_1 \varrho$$

$$\frac{U_1^2}{2g} g\varrho = \frac{m_1^2 u_1^2}{2g} \frac{F_1^2}{T_1^2} g\varrho$$

Jeg har i det foregaaende under afsnittet om stød, side 21, antaget, at et stødtryk $m_1 F_1 p$ i tversnittet $m_1 F_1$ frembringer et tryk pr. fladeenhed lig $\frac{m_1 F_1 p}{T_1}$ i tversnittet T_1, ligesaavel naar det stødte legeme er et fluidum, som naar det er et fast legeme. Gaar man ud fra denne antagelse, vil der til at frembringe trykhøiden $\frac{U_1^2}{2g}$ for hele tversnittet T_1 trænges en effektiv trykhøide af det gjennem tversnittet $m_1 F_1$ tilstrømmende fluidum lig $\frac{u_1^2}{2g} \frac{T_1}{m_1 F_1}$. Denne effektive trykhøide maa, da der lides et tab i trykhøide lig $\frac{1}{2m_1}$, multipliceres med $2m_1$. For at frembringe hastigheden U_1 trænges derfor en given trykhøide lig $\frac{2m_1 U_1^2 T_1}{2m_1 g F_1} = \frac{2 U_1^2 T_1}{2g F_1}$. Da nu $\frac{U_1^2}{2g} = \frac{m_1^2 u_1^2 F_1^2}{2g T_1^2}$, blir følgelig det tryk, som frembringer hastigheden U_1, lig:

$$\frac{2m_1^2 u_1^2 F_1}{2g\ T_1} g\varrho$$

Man faar følgelig:

$$p_0 - p_1 = m_1 u_1^2 \varrho - \frac{m_1^2 u_1^2 F_1 \varrho}{T_1} = m_1 u_1^2 \varrho \left(1 - \frac{m_1 F_1}{T_1}\right)$$

Og tabet i trykhøide:

$$\frac{p_0 - p_1}{g\varrho} = \frac{2m_1 u_1^2}{2g} \left(1 - \frac{m_1 F_1}{T_1}\right).$$

$$H = \frac{u^2}{2g} + \frac{2m_1 u_1^2}{2g}\left(1 - \frac{m_1 F_1}{T_1}\right) + \frac{2m_2 u_2^2}{2g}\left(1 - \frac{m_2 F_2}{T_2}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{2m_n^2 u_n^2}{2g}\left(1 - \frac{m_n F_n}{T_n}\right)$$

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{H}{1 + 2m_1 \left(\frac{mF}{m_1 F}\right)^2 \left(1 - \frac{m_1 F_1}{T_1}\right) + .. 2m_n \left(\frac{m\ F}{m_n F_n}\right)^2 \left(1 - \frac{m_n F_n}{T_n}\right)}$$

hvor m er kontraktionskoefficienten og F tversnittet ved udløbet af det sidste kar.

Denne sidste formel adskiller sig fra den formel, som tidligore er udviklet under afsnittet „tversnitsforandringer“, side 24, ved, at man har koefficienten $\left(1 - \frac{m_1 F_1}{T_1}\right)$ istedetfor $\left(1 - \frac{F_1}{T_1}\right)$

De formler, som er udledet af den mindre rigtige formel for trykhøidetabet, beholder dog sin gyldighed, da nemlig ved udledningen af disse m er antaget lig 1, og formlerne for trykhøidetabet isaafald blir identiske. Formlen for trykhøidetabet ved en ikke pludselig tversnitsforandring beholder saaledes sin gyldighed.

Vi har saaledes fundet 2 formler for trykhøidetabet ved tversnitsforandringer. Den første formel, side 25, hviler paa et mindre rigtigt grundlag. Der er nemlig ved udledningen af formlen gaaet ud fra, at det stødende fluidum under stødet har et mindre specifik tryk end det ydre modtryk. Denne antagelse er neppe rigtig. Naar det stødende fluidum skal udøve et tryk mod et andet fluidum, kan der ikke være nogen forskjel af endelig størrelse mellem det stødende og stødte fluidums tryk. Staar ikke det kar, hvorfra det stødende fluidum strømmer ud, i umiddelbar forbindelse med det kar, hvori det stødte fluidum befinder sig, da vil udstrømningen af det stødende fluidum kunne foregaa under et mindre specifik tryk end det ydre modtryk; men dersom karene staar i umiddelbar forbindelse med hinanden, saaledes som tilfældet er ved forsnevringer, da vil udstrømningen af det stødende fluidum ikke kunne foregaa under et specifik tryk, som er mindre end det stødte fluidums modtryk. Trykhøidetabet ytrer sig da paa den maade, at selve udstrømningshastigheden formindskes, medens en saadan formindskelse af udstrømningshastigheden ikke finder sted, naar karrene er adskilte.

Vi vil nu gaa over til at finde trykhøidetabet ved luftformige legemers bevægelse gjennem flere kar med forsnevringer. Vi skal først betragte det tilfælde, at tversnittet af karrene T er saa store i forhold til forsnevringernes tversnit F, at forholdet $\frac{F}{T}$ kan sættes ud af betragtning. Tabet i tryk ved den første forsnevring blir da, naar ϱ_0 er tætheden af gasen i det første kar:

$$p_0 - p_1 = m_1 u_1^2 \varrho_0.$$

Er nu ϱ_1 tætheden af gasen i det 2det kar, p_2 trykket og ϱ_2 tætheden af gasen i det 3die kar, saa vil der ved overgangen fra det andet kar til det tredie lides et tab i tryk, der, naar m_2 er kontraktionskoefficienten og u_2 hastigheden i forsnevringen, blir:

$$p_1 - p_2 = m_2 u_2^2 \varrho_1.$$

Og saaledes videre. Man faar det samlede tab i tryk, naar p_n er trykket i det sidste kar:

$$p_0 - p_1 + p_1 - p_2 + \ldots p_{n-1} - p_n = p_0 - p_n =$$

$$= m_1 u_1^2 \varrho_0 + m_2 u_2^2 \varrho_1 + \ldots m_n u_n^2 \varrho_{n-1}.$$

Nu er paa grund af kontinuiteten:

$$m_1 F_1 u_1 \varrho_0 = m_2 F_2 u_2 \varrho_1 = \ldots m_n F_n u_n \varrho_{n-1} = m F u \varrho,$$

naar m er kontraktionskoefficienten, F tversnittet, u hastigheden og ϱ tætheden ved udstrømningen af det sidste kar. Man faar saaledes:

$$u_1 = \frac{m F \varrho}{m_1 F_1 \varrho_0} u; \quad u_2 = \frac{m F \varrho}{m_2 F_2 \varrho_1} u \ldots u_n = \frac{m F \varrho}{m_n F_n \varrho_{n-1}} u.$$

Følgelig blir:

$$p_0 - p_n = m_1 \left(\frac{m F \varrho}{m_1 F_1 \varrho_0}\right)^2 u^2 \varrho_0 + m_2 \left(\frac{m F \varrho}{m_2 F_2 \varrho_1}\right)^2 u^2 \varrho_1 + \ldots$$
$$+ m_n \left\{\frac{m F \varrho}{m_n F_n \varrho_{n-1}}\right\}^2 u^2 \varrho_{n-1}.$$

Følgelig blir:

$$u^2 = \frac{p_0 - p_n}{m_1 \left\{\frac{m F \varrho}{m_1 F_1 \varrho_0}\right\}^2 \varrho_0 + m_2 \left\{\frac{m F \varrho}{m_2 F_2 \varrho_1}\right\}^2 \varrho_1 + \ldots + m_n \left\{\frac{m F \varrho}{m_n F_n \varrho_{n-1}}\right\}^2 \varrho_{n-1}}$$

Nu er, naar p er det ydre modtryk og ϱ tætheden af den udstrømmende gas:

$$u^2 = \frac{2 (p_n - p)}{\varrho}$$

Følgelig blir:

$$2(p_n - p) = \frac{p_0 - p_n}{m_1 \left\{\frac{m F}{m_1 F_1}\right\}^2 \frac{\varrho}{\varrho_0} + m_2 \left\{\frac{m F}{m_2 F_2}\right\}^2 \frac{\varrho}{\varrho_1} + \ldots + m_n \left\{\frac{m F}{m_n F_n}\right\}^2 \frac{\varrho}{\varrho_{n-1}}}$$

Sættes:

$$m_1 \left\{\frac{m F}{m_1 F_1}\right\}^2 \frac{\varrho}{\varrho_0} + m_2 \left\{\frac{m F}{m_2 F_2}\right\}^2 \frac{\varrho}{\varrho_1} + \ldots + m_n \left\{\frac{m F}{m_n F_n}\right\}^2 \frac{\varrho}{\varrho_{n-1}} = B,$$

faar man:

$$2 (p_n - p) = \frac{p_0 - p_n}{B}$$

$$p_n = \frac{p_0 + 2 B p}{1 + 2 B}.$$

Værdien af B kan først bestemmes, naar man kjender $\varrho, \varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_{n-1}$. Da vi har antaget, at gasen efter gjennemgangen gjennem forsnevringen kommer til ro, at altsaa al den arbeidsevne, som er begrundet i accelerationen, tabes, vil i tilstandsligningen ved expansionen, nemlig

$$p\, v^{\frac{c_v k}{c_v + h R}} = p_0\, v_0^{\frac{c_v k}{c_v + h R}}$$

h være lig $\frac{A}{2m}$

Ved udløbet af første kar, hvor $m = m_1$, blir saaledes: $h = h_1 = \frac{A}{2m_1}$,

ved udløbet af det andet kar blir: $h = h_2 = \frac{A}{2\, m_2}$ o. s. v.

Sættes nu:

$$\frac{c_v\, k}{c_v + h_1 R} = \frac{c_v\, k}{c_v + \frac{A\, R}{2\, m_1}} = s_1; \quad \frac{c_v\, k}{c_v + h_2 R} = s_2 \text{ o. s. v.,}$$

blir tilstandsligningen ved udløbet af 1ste kar:

$$p_1 v_1^{\ s_1} + p_0 v_0^{\ s_1}$$

ved udløbet af 2det kar:

$$p_2 v_2^{\ s_2} = p_1 v_1^{\ s_2}$$

o. s. v. Tætheden af gasen i karrene bestemmes da af ligningerne:

$$\varrho_1 = \varrho_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{s_1}};\ \varrho_2 = \varrho_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{s_2}} = \varrho_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{s_1}} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{s_2}}$$

$$\ldots \text{ o. s. v. } \varrho_n = \varrho_{n-1} \left(\frac{p_n}{p_{n-1}} \right)^{\frac{1}{s_n}} =$$

$$= \varrho_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{s_1}} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{s_2}} \ldots \left(\frac{p_n}{p_{n-1}} \right)^{\frac{1}{s_n}}$$

Temperaturen af gasen i det andet kar T_1 bestemmes af ligningen:

$$T_1 = \frac{p_1 v_1}{R} = \frac{p_1 v_0}{R} \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{s_1}} = \frac{p_0 v_0}{R} \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1 - \frac{1}{s_1}} = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1 - \frac{1}{s_1}},$$

naar T_0 er temperaturen i det første kar. Paa samme maade blir temperaturen i det tredie kar:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1 - \frac{1}{s_2}} = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1 - \frac{1}{s_1}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1 - \frac{1}{s_2}}$$

Og saaledes videre:

$$T_n = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{1 - \frac{1}{s_1}} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1 - \frac{1}{s_2}} \ldots\ldots \left(\frac{p_n}{p_{n-1}} \right)^{1 - \frac{1}{s_n}}$$

Er $m_1 = m_2 = \ldots m_n$, blir $h_1 = h_2 = \ldots h_n$, og $s_1 = s_2 = \ldots s_n$. Man faar da:

$$\varrho_2 = \varrho_0 \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{1}{s_1}} \ldots\ldots \varrho_n = \varrho_0 \left(\frac{p_n}{p_0} \right)^{\frac{1}{s_1}}$$

$$T_2 = T_0 \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{s^1}} \dots . T_n = T_0 \left(\frac{p_n}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{s_1}}$$

Tætheden af den gas, som strømmer ud af mundingen i det sidste kar, er bestemt af formlen:

$$\varrho = \varrho_n \left(\frac{k\, p_n - (2\, m\, k - 1)\,(p_n - p)}{k\, p + p_n - p}\right)^{\frac{1}{k}} = r\, \varrho_n,$$

hvor ϱ_n er tætheden i det sidste kar og p det ydre modtryk. Trykkene i karrene er bestemt af ligningen:

$$p_n = \frac{p_0 + 2\, B p}{1 + 2\, B}$$

Da paa grund af kontinuiteten:

$$m_1^2\, F_1^2\, u_1^2\, \varrho_0^2 = m_2^2\, F_2^2\, u_2^2\, \varrho_1^2 = \dots = m^2\, F^2\, u^2\, \varrho^2,$$

blir, da $u_1^2 = \frac{2\,(p_0 - p_1)}{\varrho_0}\,\frac{1}{2\,m_1}$; $u_2^2 = \frac{2\,(p_1 - p_2)}{\varrho_1}\,\frac{1}{2 m_2}$ ...:

$$p_0 = p_1 = \frac{m^2\, F_2}{m_1^2\, F_1^2}\,(p_n - p)\,\frac{\varrho}{\varrho_0}\, 2\, m_1$$

$$p_1 = p_0 - \frac{m^2\, F^2}{m_1^2\, F_1^2}\,(p_n - p)\,\frac{\varrho}{\varrho_0}\, 2\, m_1$$

$$p_2 = p_1 - \frac{m^2\, F^2}{m_2{}^2\, F_2{}^2}\,(p_n - p)\,\frac{\varrho}{\varrho_1}\, 2 m_2$$

. . . .

. . . .

$$p_{n-1} = p_{n-2} - \frac{m^2\, F^2}{(m_{n-1}\; F_{n-1})^2}\,(p_n - p)\,\frac{\varrho}{\varrho_{n-2}}\; 2\, m_{n-1}$$

Opgaven løses paa den maade, at man i formlerne for trykkene først antager tætheden for konstant. Man finder derved tilnærmede værdier af trykkene p_1, p_2, . . . p_n. Af disse beregnes tilnærmede værdier af tæthederne ϱ_1, ϱ_2, . . . ϱ_n og ϱ. Ved at indsætte disse i formlerne for trykkene, findes nøiagtigere værdier af disse, hvoraf atter nøiagtigere værdier af tætheden beregnes. Har man paa denne maade med tilstrækkelig nøiagtighed fundet p_n og ϱ, bestemmes udløbshastigheden af formlen:

$$u^2 = \frac{2\,(p_n - p)}{\varrho}$$

Har man blot en enkelt forsnevring og man sætter

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{p_1}{p_0}\, b, \text{ hvor } b = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{s_1} - 1},$$

saa er $p_n = p_1$ og

$$p_0 - p_1 = \left(\frac{m\,F}{m_1\,F_1}\right)^2 (p_1 - p)\frac{\varrho}{\varrho_0}\,2m_1 = 2m_1\left(\frac{m\,F}{m_1\,F_1}\right)^2 (p_1 - p)\frac{r\,\varrho_1}{\varrho_0}$$

Sætter man fremdeles $2m_1\left(\frac{m\,F}{m_1\,F_1}\right)^2 = a$, faar man:

$$p_0 - p_1 = a\,b\,r\,\frac{p_1}{p_0}(p_1 - p)$$

$$a\,b\,r\,p_1^2 + p_1(p_0 - a\,b\,r\,p) = p_0^2$$

$$p_1 = -\left(\frac{p_0 - a\,b\,r\,p}{2\,a\,b\,r}\right) + \frac{\sqrt{4\,a\,b\,r\,p_0^2 + (p_0 - a\,b\,r\,p)^2}}{2\,a\,b\,r}$$

Ved beregningen sætter man først $b = 1$ og $r = 1$, og naar man har fundet en tilnærmet værdi af p_1, beregner man en nøiagtigere værdi af b og r af formlerne:

$$b = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{s_1} - 1} \text{ og}$$

$$r = \left(\frac{k\,p_1 - (2m\,k - 1)(p_1 - p)}{k\,p + p_1 - p}\right)^{\frac{1}{k}},$$

hvorefter man finder nøiagtigere værdier af p_1 og ϱ_1.

Vi skal nu betragte det tilfælde, at forholdet $\frac{F}{T}$ ikke kan sættes ud af betragtning. Tabet i tryk ved den første forsnevring blir da:

$$p_0 - p_1 = m_1\,u_1^2\,\varrho_0\left(1 - \frac{m_1\,F_1}{T_1}\right).$$

Udstrømningen fra det første kar, hvor tætheden er ϱ_0, gjennem forsnevringen foregaar nemlig paa den maade, at ϱ_0 er konstant under udstrømningen og efter udstrømningen expanderer i det andet kar fra tætheden ϱ_0 til tætheden ϱ_1, medens trykket under expansionen forbliver uforandret lig p_1. Expansionen af gasen i det andet kar og den forøgelse af hastigheden, som er følge af expansionen, har derfor ingen indflydelse paa størrelsen af $p_0 - p_1$, hvis værdi blir uforandret den samme, som om tætheden ϱ_0 var forbleven uforandret. Ved expansionen opstaar intet reaktionstryk, som forandrer størrelsen af $p_0 - p_1$.

Ved den anden forsnevring lides et tab i tryk:

$$p_1 - p_2 = m_2\,u_2^2\,\varrho_1\left(1 - \frac{m_2\,F_2}{T_2}\right)$$

Og saaledes videre. Formlerne vil blot adskille sig fra de forrige ved, at ϱ_0 er multipliceret med $\left(1-\frac{m_1 F_1}{T_1}\right)$, ϱ_1 med $\left(1-\frac{m_2 F_2}{T_2}\right)$, $\ldots \varrho_{n-1}$ med $\left(1-\frac{m_n F_n}{T_n}\right)$, medens ϱ_n er uforandret. Sætter man nu:

$$1-\frac{m_1 F_1}{T_1}=a_1;\ 1-\frac{m_2 F_2}{T_2}=a_2;\ \ldots 1-\frac{m_n F_n}{T_n}=a_n,$$

faar man:

$$B=m_1 \frac{\varrho}{a_1 \varrho_0}\left(\frac{m F}{m_1 F_1}\right)^2+m_2 \frac{\varrho}{a_2 \varrho_1}\left(\frac{m F}{m_2 F_2}\right)^2+\ldots+$$
$$+m_n \frac{\varrho}{a_n \varrho_{n-1}}\left(\frac{m F}{m_n F_n}\right)^2$$

og

$$p_n=\frac{p_0+2 B p}{1+2 B}$$

$$p_0-p_1=\left(\frac{m F}{m_1 F_1}\right)^2 2 m_1 \frac{\varrho}{a_1 \varrho_0}(p_n-p)$$

$$p_1=p_0-2 m_1\left(\frac{m F}{m_1 F_1}\right)^2 \frac{\varrho}{a_1 \varrho_0}(p_n-p)$$

$$p_2=p_1-2 m_2\left(\frac{m F}{m_2 F_2}\right)^2 \frac{\varrho}{a_2 \varrho_1}(p_n-p)$$

. . . .

. . . .

$$p_{n-1}=p_{n-2}-2 m_{n-1}\left(\frac{m F}{m_{n-1} F_{n-1}}\right)^2 \frac{\varrho}{a_{n-1} \varrho_{n-2}}(p_n-p)$$

Tilstandsligningen for expansionen af gasen i karrene er

$$p\, v^{\frac{c_v k}{c_v+h R}}=p\, v_0^{\frac{c_v k}{c_v+h R}},$$

hvor $h=h_1=\frac{A}{2 m_1}\left(1-\frac{m_1 F_1}{T_1}\right)$ for expansionen i det 2det kar;

$h=h_2=\frac{A}{2 m_2}\left(1-\frac{m_2 F_2}{T_2}\right)$ for expansionen i det 3die kar;

. . . .

. . . .

$h=h_n=\frac{A}{2 m_n}\left(1-\frac{m_n F_n}{T_n}\right)$ for expansionen i det $(n+1)$te kar.

Sættes

$$\frac{c_v\,k}{c_v + h_1\,R} = s_1;\ \frac{c_v\,k}{c_v + h_2\,R} = s_2 \ldots \frac{c_v\,k}{c_v + h_n\,R} = s_n,$$

faar man som tilstandsligning for expansionen i det 2det kar: $p\ v^{\,s_1} = p_0\,v_0^{\,s_1}$, hvoraf:

$$\varrho_1 = \varrho_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{s_1}}$$

Paa samme maade faar man:

$$\varrho_2 = \varrho_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{s_2}} = \varrho_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{s_1}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{s_2}}$$

. . . .

$$\varrho_{n-1} = \varrho_{n-2} \left(\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}\right)^{\frac{1}{s_{n-1}}} = \varrho_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{s_1}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{s_2}} \ldots$$

$$\ldots \left(\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}\right)^{\frac{1}{s_{n-1}}}$$

$$\varrho_n = \varrho_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{s_1}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{s_2}} \ldots \left(\frac{p_n}{p_{n-1}}\right)^{\frac{1}{s_n}}$$

Fremdeles er:

$$\varrho = \varrho_n \left(\frac{k p_n - (2 m\,k - 1)(p_n - p)}{k p + p_n - p}\right)^{\frac{1}{k}} = r\,\varrho_n$$

For at løse opgaven sætter man først tætheden konstant, $\varrho_0 = \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_n = \varrho$ og beregner $p_n, p_0, p_1, \ldots p_n - 1$. Af de saaledes fundne tilnærmede værdier af p beregnes tilnærmede værdier af $\varrho_0, \varrho_1, \ldots \varrho_n$ og ϱ. Af disse beregnes en nøiagtigere værdi af $p_n, p_0, \ldots p_n - 1$, hvoraf man finder nøiagtigere værdier af tæthederne. Naar man har fundet disse med den grad af nøiagtighed, som man ønsker, faar man overtrykket for udløbet af det sidste kar af ligningen:

$$p_n - p = \frac{p_0 - 2\,B\,p}{1 + 2\,B} - p$$

og udløbshastigheden af formlen:

$$u^2 = \frac{2\,(p_n - p)}{\varrho}.$$

Uoverensstemmelse mellem min hydrauliske theori og de hydrauliske forsøg.

Min hydrauliske theori synes i flere henseender ikke at kunne forliges med iagttagelserne. Efter min theori er den effektive trykhøide H_e, efter at hastighedsforøgelsen er endt, altsaa efter at udløbet har fundet sted og fluidet i reservoiret ikke længer virker paa straalen, mindre end den givne trykhøide H, hvoraf hastigheden under udstrømningen bestemmes. Naar m er kontraktionskoefficienten, saa er:

$$H_e = \frac{H}{2m}.$$

Er saaledes udløbet fuldt, m = 1, saa er $H_e = \frac{1}{2} H$.

Er $m = \frac{2}{3}$, saa er $H_e = \frac{3}{4} H$.

Er $m = \frac{1}{2}$, saa er $H_e = H$.

Af den effektive trykhøide bestemmes stigehøiden ved vandspring og den længde, som en under en spids vinkel udsendt straale naar. Denne skal altsaa efter min theori være afhængig af kontraktionskoefficienten. De resultater, flere hydrauliske experimentatorer er kommet til, synes at staa i strid hermed. Stigehøiden ved vandspring skal saaledes ved smaa trykhøider blive lig den givne trykhøide og efter Weisbachs forsøg ikke formindskes med voxende kontraktionskoefficient. Denne uoverensstemmelse mellem theorien og iagttagelserne — hvis disse er paalidelige — fjernes ved at antage, at kontraktionskoefficienten, der bestemmes af mundingens form, ikke er uforandret den samme i hele mundingens tversnit, men voxer fra tversnittets sidekanter til dets centrum. Med denne antagelse stemmer det ogsaa, at den kontraktionskoefficient, som er udledet af iagttagelserne, er mindre end den theoretiske.

Derimod er der andre forsøg af Weisbach, hvormed min theori paa ingen maade kan forliges. Weisbach har gjort forsøg over vandets udløb under store overtryk — flere athmosfærers tryk — og bestemt kontraktionskoefficienten ved forskjellige former af mundstykker. Han er kommet til det resultat, at kontraktionskoefficienten ikke væsentlig paavirkes af overtrykkets stigen.

Ved flere athmosfærers overtryk har han fundet, at ved konisk konvergerende og ved afrundede mundstykker udløbet fremdeles er fuldt. Efter min theori vil derimod ikke udløbet kunne foregaa fuldt, naar det ydre modtryk p_1 er mindre end det hydrostatiske overtryk ved mundingen $Hg\varrho$. Er $p_1 < Hg\varrho$, saa bestemmes kontraktionskoefficienten af ligningen:

$$m = \frac{Hg\varrho + p_1}{2\,Hg\varrho}.$$

Den vil følgelig ved stigende overtryk aftage og nærme sig $\frac{1}{2}$.

Er Weisbachs forsøg over vandets udløb under store overtryk paalidelige, maatte min theori i væsentlige punkter være urigtig. Men jeg antager, at man indtil videre kan sætte disse Weisbachske forsøg ud af betragtning. Der er nemlig ogsaa andre forhold, som kan berettige dertil. Naar vandet strømmer gjennem konisk konvergerende ansatsrør, blir vandets specifike tryk i ansatsrøret mindre end det ydre tryk, og erfaringen viser, at trykformindskelsen er større end ved udløb gjennem et cylindrisk mundstykke, naar den givne trykhøide i begge tilfælde er den samme. Men naar det givne overtryk har naaet en vis størrelse, saa ophører det cylindriske ansatsrør at gaa fuldt, fordi det specifike tryk er blevet 0. Man maa da slutte, at det samme forhold finder sted ved et konisk ansatsrør, og at det indtræder ved et mindre overtryk end ved det cylindriske.

Efter min theori vil, naar overfladetrykket p_0 og overfladens høide over mundingen h er konstante, medens det ydre modtryk ved mundingen p_1 varierer, ikke blot m aftage, naar $p_1 < Hg\varrho$, hvor $H = h + \frac{p_0 - p_1}{g\varrho}$, men for vandets vedkommende ogsaa udløbsmassen. Naar $p_1 = Hg\varrho = hg\varrho + p_0 - p_1$, blir $p_1 = \frac{hg\varrho + p_0}{2}$, og udløbshastigheden

$$v_1 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_0 - p_1}{g\varrho}\right)} = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_0}{g\varrho} - \frac{h}{2} - \frac{p_0}{2g\varrho}\right)}$$

$$v_1 = \sqrt{g\left(h + \frac{p_0}{g\varrho}\right)}$$

Udløbsmassen Q_1 blir følgelig, idet kontraktionskoefficienten $m = 1$

$$Q_1 = f\varrho v_1 = f\varrho\sqrt{g\left(h + \frac{p_0}{g\varrho}\right)}$$

Er derimod $p_1 = 0$, blir udløbshastigheden

$$v_2 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_0}{g\varrho}\right)} = v_1\sqrt{2}.$$

Og udløbsmassen Q_2, idet kontraktionskoefficienten $m = \frac{1}{2}$

$$Q_2 = m\,f\,\varrho\,v_2 = \frac{1}{2} f\,\varrho\,v_1 \sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}\, f\,\varrho\,v_1 = Q_1 \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Naar altsaa ved et konstant indre tryk $h g \varrho + p_0$ det ydre modtryk aftager fra $p_1 = \frac{h g \varrho + p_0}{2}$ til $p_1 = 0$, og overtrykket tiltager fra $\frac{h g \varrho + p_0}{2}$ til $h g \varrho + p_0$, vil ved afrundet munding udløbshastigheden voxe fra v_1 til $v_1 \sqrt{2}$, derimod udløbsmassen aftage fra Q_1 til $Q_1 \sqrt{\frac{1}{2}}$. Dette gjælder for væskers vedkommende, hvor tætheden ϱ er konstant. Ved permanente gasarter derimod, hvor ϱ er variabel, vil efter udløbsformlen for disse $Q_2 = Q_1$.

Dividerer man udløbsmassen ved munding i tynd væg med udløbsmassen ved afrundet mundstykke og kalder dette forhold kontraktionskoefficient, vil følgelig denne voxe til 1 for væskers vedkommende ligesaa vel som for gasarters. Der er saaledes ogsaa i denne henseende overensstemmelse mellem gasarter og væsker.

I andre henseender er der ogsaa uoverensstemmelse mellem de hydrauliske forsøg og min theori, som vilde være ødelæggende for denne, hvis forsøgene var paalidelige. Dette gjælder læren om reaktionstrykket, hvor den gjældende theori ogsaa er bekræftet ved forsøg. Jeg antager disse forsøg for urigtige.

Efter den gjældende theori om reaktionstrykket skal dette være dobbelt saa stort som det hydrostatiske overtryk paa den effektive munding. Størrelsen af reaktionstrykket udledes paa den maade, at man undersøger størrelsen af massen og hastigheden af det udstrømmende fluidum. Deraf finder man den kraft, som udfordres til i et sekund at meddele massen denne hastighed, og ifølge principet om ligestorheden af aktion og reaktion sættes reaktionstrykket lig denne kraft. Man betragter altsaa udløbet som frembragt af trykket af fluidet i karret. Da nu reaktionstrykket er større end det hydrostatiske tryk, blir trykket i fluidet i karret under udløbet større end under ligevægten. Denne forøgelse af trykket i fluidet er en virkning af udløbet, men udløbet er igjen en virkning af fluidets tryk. Man har saaledes en fuldkommen cirkel i tankegangen. Aarsagen er virkning af virkningen; virkningen er aarsag til aarsagen.

Efter den gjældende theori, hvor reaktionstrykket er forskjelligt fra trykket under ligevægten, maa tyngdens acceleration under udløbet forandres for fluidet i karret og være større end under ligevægten — ved fuldt udløb dobbelt saa stor — medens den er uforandret for det udstrømmende fluidum; efter min theori derimod, hvor reaktionstrykket er lig det hydrostatiske overtryk paa mundingen, blir tyngdens acceleration uforandret for fluidet i karret, naar dette tænkes i ligevægt, men forandres derimod for det udstrømmende fluidum.

Betragter man det stedfindende udløb ikke som en virkning af trykket af fluidet i karret, men af andre aarsager, saa vil udløbet ikke kunne frembringe nogen reaktion ligeoverfor fluidet i karret. Men fremkalder ikke udløbet nogen reaktion ligeoverfor fluidet i karret, saa maa dettes tryk være uforandret det samme under udløbet som under ligevægten.

Det er saaledes en umulighed, at det tryk, der fremkalder udløbet, kan forøges paa grund af den bevægelse, det fremkalder. Derimod er det ikke umuligt, at der ved den frembragte bevægelse kan frigjøres andre kræfter, som virker paa de udstrømmende partikler, og som kan forøge disses levende kraft. Medens det er en umulighed, at en kraft kan forøge sig selv, er der intet umuligt i, at kraften ved sin virksomhed kan frigjøre andre kræfter, som ogsaa blir virksomme. Og saaledes er forholdet ved fluiders udløb. Den levende kraft af det udstrømmende fluidum er i regelen for stor til, at den kan være en virkning alene af trykket af fluidet i karret. Der maa følgelig under udløbet ogsaa være andre kræfter virksomme, nemlig de paa de udstrømmende elementer virkende tyngdekræfter. De udstrømmende elementers vægt maa følgelig forandres under udløbet. Men disse andre kræfters virksomhed forandrer ikke trykket af fluidet i karret og frembringer intet reaktionstryk ligeoverfor dette.

Det er saaledes bevist, at den nuværende lære om reaktionstrykket er en umulighed, og at følgelig ogsaa de forsøg, der verificerer læren, ikke kan være rigtige. De strider ogsaa mod andre erfaringer. Iagttagelserne viser ikke, at under udløbet tyngdens acceleration forandres for fluidet i karret, hvilket maatte finde sted, hvis den gjældende lære var rigtig.

Medens forandringen af tyngdens acceleration for det udstrømmende fluidum ikke kan frembringe nogen reaktion ligeoverfor karret, fremkalder den derimod reaktion ligeoverfor selve det udstrømmende fluidum, idet dettes specifike tryk forandres. Den hastighedsforandring, som det udstrømmende fluidum erholder, ikke paa grund af tilføiede ydre kræfters virkning, men som det meddeler sig selv, ved sin egen virksomhed, fremkalder ogsaa et reaktionstryk, der opveier det tryk, fluidet paa en vis maade har udøvet mod sig selv, ved at tyngdens acceleration for dets elementer er blevet forandret. Hastighedsforandringen paa grund af det udstrømmende fluidums egen virksomhed under udløbet vil derfor ikke have nogen indflydelse paa stødtrykket eller paa dets arbeidsevne, som kun vil bestemmes af den virkning, ydre kræfter har havt, paa den hastighedsforøgelse, disse har meddelt det. Reaktionen af disse ydre kræfter vil ikke virke paa selve det udstrømmende fluidum, men udenfor dette, medens reaktionstrykket paa grund af det udstrømmende fluidums tryk paa sig selv virker paa selve fluidet og derfor neutraliserer virkningen af det direkte tryk.

Det tryk, det udstrømmende fluidum udøver paa sig selv, naar tyngdens acceleration forandres fra g til G, finder man saaledes: Naar tyngdens acceleration for det udstrømmende fluidum er g og det hydrostatiske overtryk er Hg ϱ, saa er trykket af det udstrømmende fluidum lig $Hg\varrho$. Forandres nu g til G, saa forandres massen, som sættes i bevægelse, fra M til $M\frac{g}{G}$: Følgelig maa ogsaa kraften, som meddeler denne forandrede masse den givne hastighed, forandres til $Hg\varrho\frac{g}{G}$, og dette blir ogsaa trykket af det udstrømmende fluidum, naar tyngdens acceleration er g. Er den virksomme del af tyngdens acceleration ikke g, men (g — G), saa blir følgelig kraften eller trykket forandret til $\frac{(g-G)}{g}Hg\varrho\frac{g}{G}$, altsaa til

$$(g-G)\frac{Hg\varrho}{G}.$$

Dette blir størrelsen af det tryk, det udstrømmende fluidum udøver mod sig selv, og følgelig ogsaa størrelsen af reaktionstrykket, hvormed det ydre tryk p_1 blir formindsket. Det specifike tryk, naar tyngdens acceleration for det udstrømmende fluidum er G, blir saaledes:

$$p = p_1 - \frac{(g-G)}{G}Hg\varrho$$

Sugning. Mange vil kanske finde den ligesaa ufordøielig den tanke, at det udstrømmende fluidum kan virke paa sig selv og forøge sin levende kraft ved sin egen virksomhed, som den tanke, at en kraft kan forøge sin størrelse ved den bevægelse, den frembringer. Ved nærmere prøvelse vil man dog vistnok finde tanken noksaa rimelig. Naar trykket af fluidet i karret har frembragt udløb, saa vil det udstrømmende fluidum have en større hastighed end fluidet i karret. Paa grund af denne større hastighed vil det udstrømmende fluidum, naar forbindelsen med karret ikke er ophørt, virke sugende paa fluidet i karret. Den levende kraft af det fluidum, som kommer til udløb, vil saaledes være en virkning ikke blot af det indre tryk i karret, men ogsaa af det fluidum, som før er strømmet ud. Den givne kraft, det hydrostatiske overtryk paa mundingen, har saaledes ved sin virksomhed, ved den bevægelse, den har fremkaldt, frembragt en ny kraft, nemlig sugningen af det fluidum, som er strømmet ud; og denne kraft blir ogsaa virksom ved udløbet. Til sugekraften svarer ingen reaktion ligeoverfor karret, men derimod ligeoverfor det fluidum, som er strømmet ud. Dettes effektive levende kraft eller arbeidsevne forøges derfor ikke trods den ved sugningen fremkaldte forøgede udløbsmængde. At en saadan sugning finder sted ved udløbet bevises af forholdene ved tilstrømningen til mundingen. Tilstrømningen foregaar jo nemlig ikke blot ovenfra nedad, men ogsaa nedenfra opad mod mundingen.

Det er ikke blot ved udløbet, at en saadan sugning finder sted. Den vil forekomme overalt, hvor det foran strømmende fluidum har en større hastighed end det efterfølgende. Overalt, hvor der optræder en hastighedsforøgelse, vil det fluidum, hvis hastighed forøges. virke tilbage paa det langsommere strømmende. Og den kraft, hvormed det virker paa det langsommere strømmende, er lig den kraft, der fremkalder hastighedsforøgelsen. Ved enhver hastighedsforøgelse af et fluidum vil saaledes den masse af fluidet, som meddeles den givne hastighedstilvext, være dobbelt saa stor som den masse, hvis hastighed den givne kraft alene kunde forøge. Naar saaledes et fluidum strømmer gjennem et kar, hvis tversnit lidt efter lidt forsnevres, og dets hastighed saaledes forøges ved overgangen fra det ene tversnit til det andet, saa vil denne hastighedsforøgelse ikke blot være en virkning af tyngden og trykkene, men ogsaa af sugekraften, hvis virkning vil være lig tyngdens og trykkenes virkning. Af den masse, som har faaet sin hastighed forøget, vil kun den ene halvpart have erholdt hastighedstilvexten ved tyngdens og trykkenes virksomhed, den anden halvpart vil have erholdt den ved selve fluidets virksomhed, ved dettes sugning ligeoverfor det foran strømmende fluidum. Da fluidets hastighed ikke formindskes trods forøgelsen af den masse, som accelereres, maa den specifike vægt af det strømmende fluidum formindskes og ligesaa dets specifike tryk.

Man kunde benytte fluidets sugning som grundlag ved udledningen af lovene for bevægelsen. Det specifike tryk findes let. Er udløbet fuldt, vil den totale kraft ved udløbet — den kraft, der udfordres for at meddele den udstrømmende masse den givne hastighed — for den ene halvparts vedkommende være tyngdens og trykkenes virkning, den anden halvpart vil være virkningen af sugekraften. Er hastigheden v og tversnittet f, tætheden ϱ, saa er $f v \varrho$ den i et sekund udstrømmende masse og v accelerationen; følgelig blir den totale kraft lig $f \varrho v^2$. Den del deraf, som skyldes sugningen, blir $\frac{1}{2} f \varrho v^2$. Er nu det ydre modtryk p_1, blir det specifike tryk p:

$$p = p_1 - \frac{1}{2} \varrho v^2.$$

Indsættes $v^2 = 2g\,H$, hvor H er den givne trykhøide, blir:

$$p = p_1 - Hg\,\varrho.$$

Foregaar ikke udløbet fuldt, men under kontraktion med kontraktionskoefficienten m, saa er den totale kraft $m\, f\, \varrho\, v^2$.

Den del deraf, som skyldes tyngden og trykkene er $\frac{1}{2}$ f ϱ v^2, og følgelig blir den del, som skyldes sugningen

$$m f \varrho v^2 - \frac{1}{2} f \varrho v^2 = (2m - 1) f \varrho \frac{v^2}{2}.$$

Det specifike tryk blir altsaa:

$$p = p_1 - (2m - 1) \varrho \frac{v^2}{2} = p_1 - (2m - 1) H g \varrho.$$

Kontraktionskoefficienten finder man ved betragtning af stødet mod karrets vægge. Derved formindskes den levende kraft af fluidet i karret, men til gjengjæld forøges det specifike tryk, saaledes at dets arbeidsevne ikke forandres. Det blir altsaa blot massen af det fluidum, som sættes i bevægelse ved sugningen, der blir formindsket ved stødet mod karrets vægge; derimod blir ikke tyngdens og trykkenes virkning mindre.

Der er saaledes intet til hinder for at opbygge de hydrauliske theorier paa grundlag af læren om fluidets sugning ligeoverfor sig selv. Og sagen vil derved kanske for enkelte være lettere at forstaa. Men andre vil maaske finde, at grundlaget er noget hypothetisk. Jeg har opbygget theorierne uden denne hypothese paa grundlag af de almindelige mekaniske grundlove, der danner betingelsen for, at en mekanisk videnskab skal være mulig. Og jeg nærer ikke tvil om, at mine theorier i det væsentlige vil blive godkjendt, om der end ved enkeltheder maaske kan gjøres berettigede indvendinger.

Indhold.

Rettelser.

S. 14 L. 12 ovf.: istdf. p^0 læs: p_0.

S. 22 L. 10 ovf.: istdf. $\frac{1}{1 \sin \alpha}$ læs: $\frac{1}{1 + \sin \alpha}$

S. 34 L. 15 ovf.: istdf. $\left(p + \frac{D}{1+r}\right) v^{1+r} = \left(p_1 + \frac{D}{1+r}\right) v^{1+r}$ læs:

$$\left(p + \frac{D}{1+r}\right) v^{1+r} = \left(p_1 + \frac{D}{1+r}\right) v_0^{1+r}$$

S. 49 L. 1 ovf.: istdf. $t\, e \frac{Q_1}{Q_0} \sqrt{D^2 - 4F}$ læs: $e^{t \frac{Q_1}{Q_0} \sqrt{D^2 - 4F}}$

S. 49 L. 2, 4 og 6 ovf.: istdf. $e^{\frac{Q_1}{Q_0} \sqrt{D^2 - 4Ft}}$ læs: $e^{t \frac{Q_1}{Q_0} \sqrt{D^2 - 4F}}$

S 49 L. 5 og 6 ovf.: istdf. $e^{\frac{Q_1}{Q_0} \sqrt{D^2 - 4Ft} - 1}$ læs: $e^{t \frac{Q_1}{Q_0} \sqrt{D^2 - 4F} - 1}$

S. 51 L. 3, 4, 6, 8, 9, 11 ndf.: istdf. $e \frac{aS}{E} t$ og $e \frac{aS}{E} t$ læs:

$$e^{\frac{aS}{E} t} \text{ og } e^{\frac{aS}{Eh} t}$$

S. 56 L. 2 ndf.: istdf. $e \frac{s \left(p\, v_0 \left(\frac{1}{1-q}\right) - p_0\, v_0\right)}{s\, p_0\, v_0 + c_v}$ læs:

$$e^{\frac{s \left(p\, v_0 \left(\frac{1}{1-q}\right) - p_0\, v_0\right.}{s\, p_0\, v_0 + c_v}}$$

S. 64 L. 9 ovf.: istdf. $p\, v\, R\, T$ læs: $p\, v = R T$.

S. 72 L. 6 ovf.: istdf. $m\, f_2$ læs: $m\, f^2$.

S. 85 L 1 ndf. paa 2 steder: istdf: $\int_{p_0}^{p^1}$ læs: $\int_{p_0}^{p_1}$

S. 92 L. 2 ovf.: istdf. $\frac{u_1^2\, \varrho_1}{2}$ læs: $\frac{u_1^2\, \varrho_1^2}{2}$

S. 93 L. 10 ovf.: istdf.: $\frac{G\, p\, r - p_0)}{p_0^2}$ læs: $\frac{G\, (p\, r - p_0)}{p_0^2}$

S. 96 L. 7 ndf.: istdf. $2\, m\, n^2$ læs: $2\, m_n$

S. 100 L. 11 ovf.: istdf. $m^2\, F_2$ læs: $m^2\, F^2$